APPROCHE D'UN REEL PAR DICHOTOMIE

Explications sur un exemple

On se propose de résoudre l'équation $x^3 + 2x - 1 = 0$ (E).
En désignant par f la fonction $x \mapsto x^3 + 2x - 1$, l'équation (E) s'écrit $f(x) = 0$.

1. Existence d'une solution

a) Étudiez la fonction f sur l'intervalle [0 ; 1] puis démontrez que l'équation (E) a une solution et une seule que l'on note α, et que $0 < \alpha < 1$.

b) Représentez la fonction f restreinte à l'intervalle [0 ; 1] dans un repère orthogonal (unités graphiques : 10 cm en abscisse, 2 cm en ordonnée).

2. Construction de deux suites

Nous allons définir deux suites (u_n) et (v_n) qui convergent vers a. Pour cela, nous allons encadrer α de plus en plus finement en utilisant le principe suivant :

- On partage l'intervalle [0 ; 1] en deux intervalles de même longueur $I_1 = [0 ; 1/2]$ et $I_2 = [1/2 ; 1]$.
- On cherche celui de ces deux intervalles qui contient α : si c'est I_1, on pose $u_1 = 0$ et $v_1 = 1/2$, si c'est I_2, on pose $u_1 = 1/2$ et $v_1 = 1$.
- Puis à partir de l'intervalle I_1, (ou I_2) qui contient α, on réitère l'opération: partage en deux, localisation de α, ...

On construit ainsi deux suites :
- celle des extrémités inférieures qui est croissante. Notons-la (u_n), avec $u_o = 0$;
- celle des extrémités supérieures qui est décroissante. Notons-la (v_n), avec $v_o = 1$. La localisation est facilitée par la monotonie de la fonction f.

(Pour tout n, $f(u_n) \leq 0 \leq f(v_n)$)

a) Vérifiez que $[u_l ; v_l] = [0 ; 0,5]$ et que $[u_2 ; v_2] = [0,25 ; 0,5]$. Placez les réels u_1, v_1, u_2 et v_2 sur l'axe des abscisses.

b) Trouvez u_3, v_3, u_4, v_4, u_5, v_5 et placez-les sur l'axe des abscisses.

c) Démontrez que, pour tout entier n, $v_n - u_n \leq (1/2)^n$, $v_n - \alpha \leq (1/2)^n$, $\alpha - u_n \leq (1/2)^n$.

Déduisez-en le nombre de partages nécessaires pour parvenir à un encadrement de longueur inférieure à 10^{-3}. Trouvez cet encadrement.

d) Expliquez pourquoi les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes vers la même limite. Soit α leur limite commune. Quel théorème a-t-on vérifié avec cet exemple ?

Conclusion : Ce que nous venons de faire sur un exemple est généralisable. Lorsqu'une solution de l'équation $f(x)=0$ est localisée dans un intervalle [a ; b], la dichotomie consiste à définir deux suites (u_n) et (v_n) encadrant et convergeant vers cette solution.

Lorsque $f(u_n)$ et $f\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right)$ sont de signes contraires, on pose : $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$

Lorsque $f(u_n)$ et $f\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right)$ sont de même signe, on pose : $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1} = v_n$