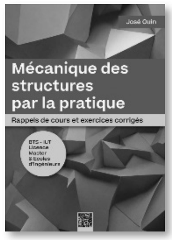
José Ouin
Ingénieur INSA Toulouse
Ancien élève de l'ENS Cachan
Professeur Agrégé de Génie civil
Professeur Agrégé de Mathématiques

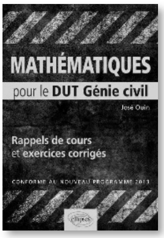
Bases mathématiques essentielles pour préparer l'entrée dans le supérieur

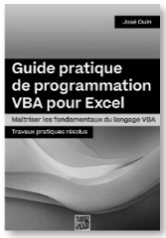
Tome 4 : Statistique & Probabilité

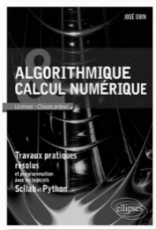
Rappels de cours et exercices corrigés

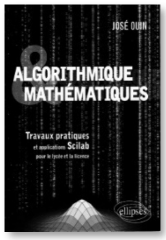
Du même auteur aux Editions Ellipses et Educalivre

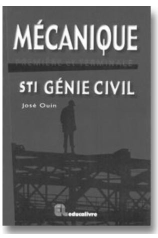












ISBN : 978-2-9593648-4-6

Avant-Propos

Cet ouvrage, conçu avec une attention particulière à la rigueur et à la clarté, a pour objectif d'accompagner les étudiants dans leur préparation aux études supérieures. En proposant des rappels de cours précis et des exercices résolus et détaillés, il constitue un support méthodique non seulement pour aborder les concepts fondamentaux des mathématiques, mais aussi pour réviser les notions acquises au lycée dans le cadre du baccalauréat.

Ce livre s'inscrit dans une série de quatre ouvrages (Algèbre, Analyse, Trigonométrie & Géométrie, Statistique & Probabilité), chacun dédié à une branche spécifique des mathématiques. Ces ouvrages offrent une progression cohérente et graduée, permettant aux étudiants de renforcer leurs bases tout en se préparant aux exigences des études post-baccalauréat.

Je suis convaincu que cette série saura répondre aux besoins des étudiants et des enseignants, en offrant un soutien précieux pour consolider les acquis en mathématiques et en faciliter l'application pratique dans le cadre de leurs études supérieures. Que ces livres deviennent des compagnons de confiance dans leur parcours académique et un tremplin vers la réussite.

José Ouin
www.joseouin.fr

Présentation détaillée des quatre ouvrages suivants :

Bases mathématiques essentielles pour préparer l'entrée dans le supérieur

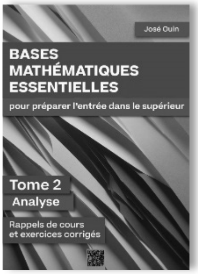
<table>
<tr><td>
ISBN : 978-2-9593648-1-5</td><td>Bases mathématiques essentielles pour préparer l'entrée dans le supérieur – Tome 1 : Algèbre
Prérequis essentiels
Calcul matriciel
Fonctions polynômes
Fonctions rationnelles
Nombres complexes</td></tr>
<tr><td>
ISBN : 978-2-9593648-2-2</td><td>Bases mathématiques essentielles pour préparer l'entrée dans le supérieur – Tome 2 : Analyse
Fonction logarithme et fonction exponentielle
Généralités sur les fonctions
Fonctions réciproques
Calcul intégral
Équations différentielles
Fonctions de plusieurs variables
Opérateurs différentiels
Calcul d'incertitudes</td></tr>
<tr><td>
ISBN : 978-2-9593648-3-9</td><td>Bases mathématiques essentielles pour préparer l'entrée dans le supérieur – Tome 3 : Trigonométrie & Géométrie
Prérequis essentiels (triangles)
Trigonométrie
Géométrie dans le plan
Géométrie dans l'espace</td></tr>
<tr><td>
ISBN : 978-2-9593648-4-6</td><td>Bases mathématiques essentielles pour préparer l'entrée dans le supérieur – Tome 4 : Statistique & Probabilité
Statistique descriptive
Ajustement linéaire
Lois de probabilité</td></tr>
</table>

Table des matières

Première partie

Statistique descriptive

Présentation de la première partie 9

1- Vocabulaire de la statistique descriptive 11

1-1. Définitions 11

1-2. Série statistique 11

2- Présentation d'une série discrète 12

2-1. Effectif d'une modalité 12

2-2. Fréquence d'une modalité 12

2-3. Effectifs et fréquences cumulées 12

2-4. Diagramme des effectifs et des fréquences 13

2-5. Exemple 13

3- Présentation d'une série continue 14

3-1. Discrétisation d'une série continue 14

3-2. Classes d'une série continue 14

3-3. Série classée 14

3-4. Hypothèse de discrétisation 15

3-5. Densité de fréquence 15

3-6. Histogramme des fréquences 15

3-7. Fonction fréquence cumulée 15

3-8. Exemple 16

4- Paramètres d'une série discrète 18

4-1. Paramètres de position 18

4-1.1 Mode 18

4-1.2 Médiane 18

4-1.3 Les quartiles 18

4-1.4 Moyenne arithmétique 19

4-2. Paramètres de dispersion 19
4-2.1 Étendue 19
4-2.2 Écart interquartile 19
4-2.3 Variance 19
4-2.4 Écart type 20

4-3. Utilisation de la calculatrice 21

4-4. Exemple 21

5- Paramètres d'une série continue 23

5-1. Discrétisation de la série continue 23

5-2. Paramètres de position 23
5-2.1 Classe modale 23
5-2.2 Médiane 23
5-2.3 Quartiles 23
5-2.4 Moyenne arithmétique 24

5-3. Paramètres de dispersion 24
5-3.1 Étendue 24
5-3.2 Écart interquartile 24
5-3.3 Variance 24
5-3.4 Écart type 24

5-4. Utilisation de la calculatrice 25

5-5. Exemple 25

6- Exercices pour s'entraîner 27

Deuxième partie

Ajustement linéaire

Présentation de la deuxième partie 37

1- Présentation 39

2- Définitions et ajustement linéaire 39

2-1. Nuage de points associé à une population 39

2-2. Principe de l'ajustement linéaire 39

2-3. Écart quadratique moyen 40

2-4. Droite de régression linéaire au sens des moindres carrés 41

2-5. Coefficient de détermination – Coefficient de corrélation 41

3- Transformation logarithmique 43

3-1. Puissance de X 43

3-2. Cas de l'exponentielle 43

3-3. Cas de la fonction puissance 43

4- Exemple 44

5- Exercices pour s'entraîner 47

Troisième partie

Lois de probabilité

Présentation de la troisième partie 57

1- Rappels sur les probabilités 59

1-1. Définitions de la probabilité 59

1-1.1 Définition déterministe de la probabilité 59

1-1.2 Définition empirique de la probabilité 59

1-2. Variables aléatoires 59

1-2.1 Définition 59

1-2.2 Variable aléatoire discrète 59

1-2.3 Variable aléatoire continue 60

1-3. Lois de probabilité 61
1-3.1 Définition 61
1-3.2 Représentation d'une loi de probabilité 61
1-3.3 Fonction de répartition d'une loi de probabilité 61

2- Loi binomiale 62

2-1. Loi de Bernoulli – Schéma de Bernoulli 62

2-2. Définition de la loi binomiale 62

2-3. Espérance 63

2-4. Variance et écart type 63

2-5. Exemple 63

3- Loi normale (ou loi de Laplace-Gauss) 64

3-1. Approximation de la loi binomiale par la loi normale 64
3-1.1 Intérêt de l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale 64
3-1.2 Diagrammes en bâtons et courbe de la loi normale 64

3-2. Définition de la loi normale 66

3-3. Loi de probabilité de X 66

3-4. Espérance et écart type 66

3-5. Les intervalles « un, deux , trois sigmas » 66

3-6. Propriétés 67

4- Loi normale centrée réduite 67

4-1. Intérêt de centrer et de réduire 67

4-2. Calculs permettant de centrer et de réduire 67

4-3. Théorème de Moivre-Laplace 68

4-4. Loi de probabilité de U 68

4-5. Espérance et écart type 69

4-6. Représentation graphique 69

4-7. Propriétés 69

4-8. Théorème 70

4-9. Influence de l'écart type 71

4-10. Table de la loi normale centrée réduite 72

5- Exercices pour s'entraîner 73

Rappels de cours
Statistique descriptive

1- Vocabulaire de la statistique descriptive

1-1. Définitions

L'objet de la statistique descriptive est d'étudier et de comparer les éléments d'un ensemble de grande taille. Cet ensemble est appelé population, noté mathématiquement Ω, et ses éléments sont des individus, notés ω_i :

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$$

- **Exemple**

On considère l'ensemble des notes à un examen. Cet ensemble est appelé population et les individus sont des notes.

- **Définitions**

(1) La taille d'une population est le nombre d'individus qui la composent.
(2) Un échantillon est une partie de la population Ω.
(3) Le caractère étudié est une caractéristique des individus de la population Ω.
(4) Caractère qualitatif : le caractère est qualitatif lorsqu'il ne peut faire l'objet d'aucune mesure (couleur des yeux, couleur préférée, etc.).
(5) Caractère quantitatif : le caractère est quantitatif lorsqu'il est mesurable (température, contraintes, notes à un examen, etc.).

Dans cette partie, on ne s'intéresse qu'aux caractères statistiques quantitatifs.

1-2. Série statistique

Une série statistique est la famille des valeurs prises par un caractère quantitatif sur l'ensemble de la population Ω. Ces valeurs sont les modalités du caractère étudié.

On distingue deux types de séries statistiques :

- lorsque les modalités d'un caractère ne peuvent prendre que des valeurs discrètes, la série est dite discrète.
- lorsque les modalités peuvent prendre a priori n'importe quelle valeur dans tout un intervalle I de IR, la série est dite continue.

2- Présentation d'une série discrète

2-1. Effectif d'une modalité

On considère une série statistique Ω et on range les modalités d'un caractère étudié dans l'ordre croissant : $x_1, x_2, ..., x_p$. On appelle effectif de la modalité x_i, noté n_i, le nombre d'individus de Ω de modalité égale à x_i.

On note N l'effectif total de la population qui est la somme des effectifs de chaque modalité :

$$N = n_1 + n_2 + ... + n_p$$

Les modalités et les effectifs correspondants sont regroupés dans un tableau comportant deux lignes :

- la première ligne contient les modalités rangées dans l'ordre croissant ;
- la deuxième ligne contient les effectifs de chaque modalité.

2-2. Fréquence d'une modalité

La fréquence d'une modalité x_i, notée f_i, est le rapport entre l'effectif de cette modalité et l'effectif total :

$$f_i = \frac{n_i}{N}$$

2-3. Effectifs et fréquences cumulées

On donne les définitions suivantes :

- Effectif cumulé croissant d'une modalité x_i : il s'agit de la somme des effectifs des modalités x_1 à x_i :
$$n_1 + n_2 + ... + n_i$$
- Effectif cumulé décroissant d'une modalité x_i : il s'agit de la somme des effectifs des modalités x_i à x_p :
$$n_i + n_{i+1} + ... + n_p$$
- Fréquence cumulée croissante d'une modalité x_i : il s'agit de la somme des fréquences des modalités x_1 à x_i :
$$f_1 + f_2 + ... + f_i$$
- Fréquence cumulée décroissante d'une modalité x_i : il s'agit de la somme des fréquences des modalités x_i à x_p :
$$f_i + f_{i+1} + ... + f_p$$

Exercices pour s'entraîner

Exercice 1

Le tableau suivant donne la répartition des entreprises d'un secteur du Génie civil en fonction de leurs chiffres d'affaires en millions d'euros :

Classes	[0 ; 1[	[1 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 7[	[7 ; 10[
Effectifs	150	210	210	120	80	50

1/ Tracer l'histogramme correspondant à cette répartition.
2/ Tracer le diagramme des fréquences cumulées et déterminer la médiane et les quartiles.
3/ A l'aide de la calculatrice, calculer la moyenne et l'écart type.
4/ Représenter le diagramme en boîte de cette répartition.

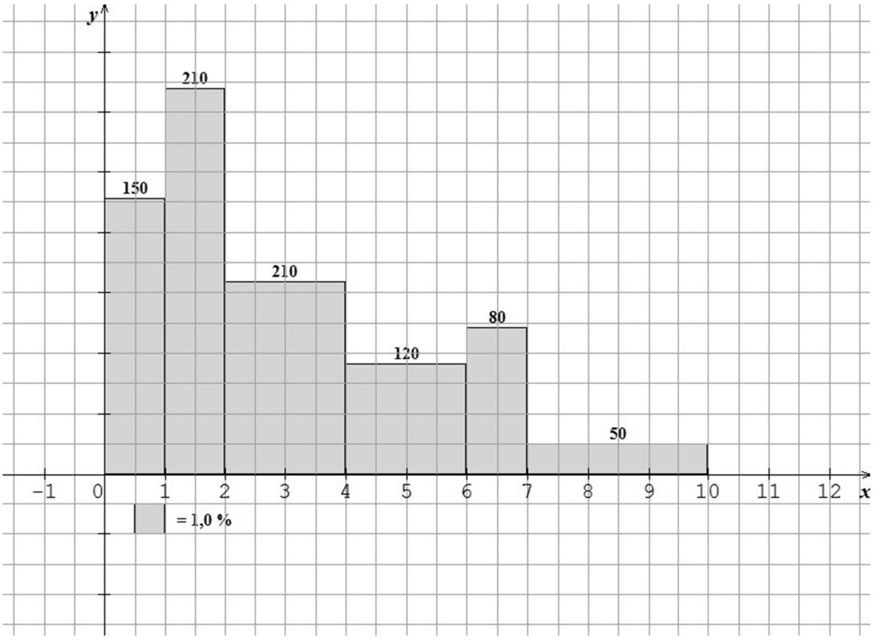
Solution

On commence par ajouter des lignes supplémentaires au tableau initial :

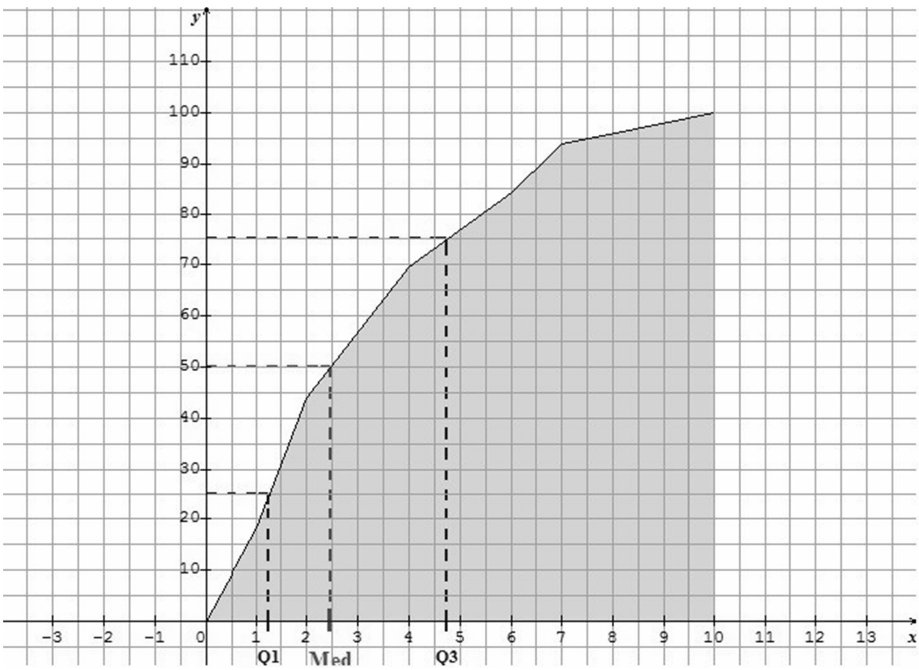
Classes	[0 ; 1[	[1 ; 2[	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 7[	[7 ; 10[
Effectifs	150	210	210	120	80	50
Fréquences en %	18,29	25,61	25,61	14,63	9,76	6,10
Fréquences cumulées en %	18,29	43,90	69,51	84,14	93,90	100
Densités de fréquence en %	18,29	25,61	12,81	7,32	9,76	2,03
Centre des classes	0,5	1,5	3	5	6,5	8,5

1/ Histogramme de la série classée :
La hauteur des rectangles est proportionnelle à la densité de fréquence. L'aire des rectangles est proportionnelle à la fréquence.

Histogramme des fréquences :



2/ Diagramme des fréquences cumulées :



Rappels de cours
Ajustement linéaire

1- Présentation

Pour une population statistique donnée, on étudie simultanément deux caractères statistiques différents X et Y. On fait l'hypothèse que le caractère Y dépend linéairement du caractère X.
Il s'agit de déterminer les réels a et b tels que :

$$Y = aX + b$$

- **Variable indépendante et variable dépendante**

L'objectif d'un ajustement linéaire est de proposer un modèle permettant de calculer la valeur de Y en fonction de X. La variable X est la variable indépendante ou explicative, et la variable Y est la variable dépendante ou à expliquer.

2- Définitions et ajustement linéaire

2-1. Nuage de points associé à une population

Il s'agit d'étudier deux caractères X et Y chez les individus d'une population statistique. On dispose, pour chaque individu ω_i, des modalités x_i et y_i prises par les caractères X et Y. On représente dans un repère cet individu ω_i par le point M_i de coordonnées $(x_i; y_i)$.

- **Nuage de points**

On appelle nuage de points l'ensemble des points obtenus en représentant toute la population.

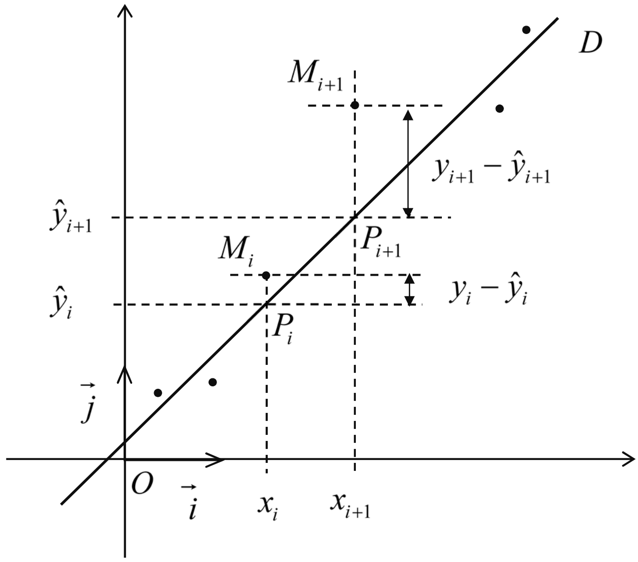
- **Point moyen**

On appelle point moyen du nuage de points le point G de coordonnées $(\overline{X}; \overline{Y})$ où $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ sont les moyennes arithmétiques des séries statistiques X et Y.

2-2. Principe de l'ajustement linéaire

Il s'agit de déterminer les réels a et b tels que la distance moyenne entre les points du nuage et la droite D d'équation $y = ax + b$ soit minimale.

Pour chaque point M_i, d'abscisse x_i, on considère la distance définie par l'écart entre le point théorique, situé sur la droite, et le point M_i du nuage de points. Cette distance se mesure algébriquement en faisant la différence entre les ordonnées de ces deux points d'abscisses identiques.



A chaque point $M_i(x_i;y_i)$ correspond un $P_i(x_i;\hat{y}_i)$ sur la droite D d'équation $y = ax + b$, avec $\hat{y}_i = ax_i + b$. On calcule la différence $\hat{y}_i - y_i$ correspondant à la distance entre le point M_i et la droite D. Cette différence est appelée résidu associé au point M_i et à la droite D. Il s'agit de déterminer les réels a et b tels que la moyenne des carrés des résidus soit minimale.

2-3. Écart quadratique moyen

Dans un repère orthonormé, on considère un nuage de N points $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$, ..., $M_N(x_N;y_N)$ et une droite D d'équation $y = ax + b$.

On note $P_i(x_i;\hat{y}_i)$, pour i allant de 1 à N, le point de D ayant la même abscisse que le point $M_i(x_i;y_i)$. Ses coordonnées vérifient l'équation de la droite D, on a donc l'égalité suivante :

$$\hat{y}_i = ax_i + b$$

- **Écart quadratique moyen**

L'écart quadratique moyen par rapport à la droite D est la moyenne des carrés des résidus des points du nuage :

$$EQ(a;b) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\hat{y}_i - y_i)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(ax_i + b - y_i)^2$$

- **Remarque**

Pour un nuage de points donné, cette valeur moyenne ne dépend que du coefficient directeur a et de l'ordonnée à l'origine b de la droite D.

Exercices pour s'entraîner

Exercice 1

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du SMIC horaire en euros de 2007 à 2013 :

Année	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
SMIC horaire brut y_i	8,44	8,67	8,82	8,86	9,09	9,31	9,43

1/ A l'aide de la calculatrice, calculer les coordonnées du point moyen G.
2/ Déterminer l'équation de la droite D de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à 10^{-3} près). Représenter la droite D et le nuage de points associé à la série $(x_i; y_i)$ dans le même repère.
3/ Calculer, avec cet ajustement, le montant du SMIC horaire que l'on peut prévoir en 2020 (résultat arrondi au centième).
4/ On envisage un autre modèle pour prévoir l'évolution du montant du SMIC horaire. On suppose qu'à partir de l'année 2013, le SMIC horaire progressera de 2% par an. On désigne par u_n le montant du SMIC horaire, en euros, de l'année $2013+n$. On a donc $u_0 = 9{,}43$.
4.1/ Calculer le montant du SMIC horaire en 2020 (résultat arrondi au centième).
4.2/ A partir de quelle année le SMIC horaire aura-t-il dépassé 12 euros ?

Solution

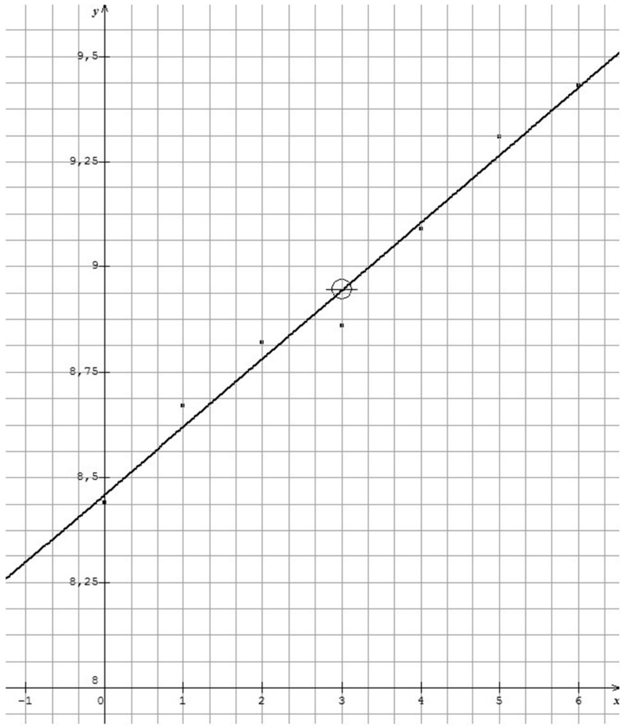
1/ Coordonnées du point moyen G :

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i}{7} = 3 \quad \text{et} \quad \overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{7} y_i}{7} = 8{,}95$$

2/ La calculatrice permet de déterminer l'équation suivante :

$$y = 0{,}161x + 8{,}461$$

Représentations graphiques du nuage de points $(x_i ; y_i)$ et de la droite D :



3/ En 2020, $x = 13$. On obtient : $y = 0{,}161(13) + 8{,}461 = 10{,}554$
d'où :

$$y = 10{,}55 \text{ euros en 2020.}$$

4/ D'après l'énoncé : $u_n = u_0 \times (1{,}02)^n = 9{,}43 \times (1{,}02)^n$.
4.1/ Montant du SMIC horaire en 2020 :

$$u_7 = 9{,}43 \times (1{,}02)^7 = 10{,}8321$$

d'où :

$$y = 10{,}83 \text{ euros en 2020.}$$

4.2/ Il s'agit de résoudre l'inéquation suivante :

$$9{,}43(1{,}02)^n > 12$$

On obtient $n > \dfrac{1}{\ln(1{,}02)} \ln\left(\dfrac{12}{9{,}43}\right)$; $n > 12{,}17$. On choisit $n = 13$.

Le SMIC horaire aura dépassé 12 euros en 2026.

Rappels de cours
Lois de probabilité

1- Rappels sur les probabilités

1-1. Définitions de la probabilité

1-1.1 Définition déterministe de la probabilité

Lors de la réalisation d'un événement dont le nombre d'issues favorables peut être calculé au moyen de l'analyse combinatoire (compte tenu de l'hypothèse d'équiprobabilité des issues), on définit la probabilité de cet événement par le rapport du nombre d'issues favorables k au nombre d'issues possibles n :

$$P = \frac{k}{n}$$

½ Exemple

Une urne contient 3 boules rouges et 10 boules vertes. On tire au hasard une boule de cette urne. La probabilité d'obtenir une boule rouge est égale à $\frac{3}{13}$.

1-1.2 Définition empirique de la probabilité

Si après un grand nombre n de réalisations d'une expérience on observe k fois l'issue souhaitée, la probabilité de cet événement est la limite de la fréquence $f = \frac{k}{n}$ des observations de l'issue souhaitée :

$$P = \lim_{n \to +\infty} \frac{k}{n} = \lim_{n \to +\infty} f$$

1-2. Variables aléatoires

1-2.1 Définition

On considère un événement comportant un certain nombre d'issues. Si on associe un nombre à chaque issue, ou à chaque ensemble d'issues, ce nombre est appelé variable aléatoire. On la note par une lettre majuscule X. Les valeurs particulières de la variable aléatoire X sont notées x_i.

1-2.2 Variable aléatoire discrète

Une variable aléatoire discrète est une variable qui ne peut prendre que des valeurs isolées. Elle est généralement représentée par un entier. On peut associer une probabilité à une variable aléatoire discrète.

- **Exemple**

Une urne contient 3 boules rouges et 10 boules vertes. On tire au hasard une boule de cette urne. On associe $X = 1$ à la couleur rouge et $X = 2$ à la couleur verte.

X est alors une variable aléatoire qui à chaque couleur associe le nombre 1 ou 2. L'ensemble des valeurs prises par X est $\{1;2\}$.

Dans cet exemple : $P(X=1)=\dfrac{3}{13}$ et $P(X=2)=\dfrac{10}{13}$.

1-2.3 Variable aléatoire continue

Une variable aléatoire continue est une variable qui peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle fini ou infini. Cela signifie que la différence entre deux valeurs voisines peut être aussi petite que l'on veut. Elle est représentée par un nombre réel. On associe une densité de probabilité à une variable aléatoire continue.

- **Exemple**

On choisit au hasard un nombre réel compris dans l'intervalle $[1;5]$ et on souhaite calculer la probabilité que ce nombre soit compris entre 2 et 3. Il s'agit donc de calculer la probabilité $P(2 \le X \le 3)$.

- **Densité de probabilité**

On dit qu'une fonction f définie sur $I=[a;b]$ est une densité de probabilité si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées :

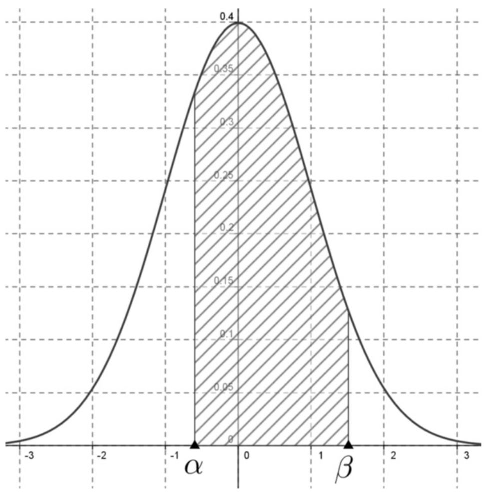
(1) f est positive et continue sur $I=[a;b]$;

(2) $\int_a^b f(t)dt = 1$ (l'aire sous la courbe représentative de f est égale à 1).

- **Loi de probabilité**

On dit que X est une variable aléatoire définie sur $I=[a;b]$ de loi de probabilité P admettant f comme densité de probabilité si pour tous réels $\alpha,\beta \in [a;b]$, avec $\alpha \le \beta$, la probabilité $P(\alpha \le X \le \beta)$ est égale à l'intégrale suivante :

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \int_\alpha^\beta f(t)dt$$



- **Remarques**

(1) $P(\alpha \le X \le \beta)$ correspond à l'aire hachurée ci-dessus.

(2) $P(X=\alpha)=0$. La probabilité en une valeur discrète est égale à 0.

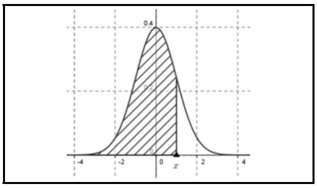
(3) $P(\alpha \le X \le \beta) = P(\alpha \le X < \beta) = P(\alpha < X \le \beta) = P(\alpha < X < \beta)$.

4-10. Table de la loi normale centrée réduite

Loi normale centrée réduite $N(0,1)$

Table de la fonction de répartition Π

$$P(X < x) = \Pi(x) \text{ et } \Pi(-x) = 1 - \Pi(x)$$



x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965

Exercices pour s'entraîner

Exercice 1

Une entreprise de travaux publics commande en très grande quantité des bordures de trottoir en béton pour reconstituer son stock. Elle s'adresse à deux usines A et B qui lui fournissent respectivement deux tiers et un tiers de ses commandes.

Le pourcentage de bordures inutilisables livrées par l'usine A est égal à 8 % et le pourcentage de bordures inutilisables livrées par l'usine B est égal à 5 %.

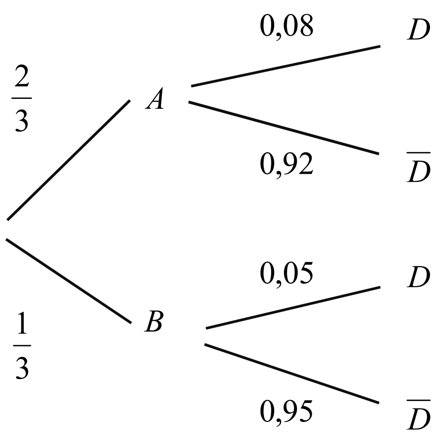
On définit les évènements suivants :
- A : "La bordure provient de l'entreprise A" ;
- B : "La bordure provient de l'entreprise B" ;
- D : "La bordure est défectueuse".

1/ Quelle est la probabilité qu'une bordure prise au hasard dans le stock provienne de l'entreprise A ?
2/ Quelle est la probabilité qu'une bordure prise au hasard dans le camion de livraison provenant de l'entreprise A, soit défectueuse ?
3/ Quelle est la probabilité qu'une bordure prise au hasard dans le stock soit défectueuse ?
4/ On constate qu'une bordure est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'usine A ?

Solution

1/ On calcule la probabilité de l'évènement A : $P(A)=\dfrac{2}{3}$.

2/ On commence par construire un arbre traduisant les données de l'énoncé :



D'après l'énoncé : $P_A(D) = 0{,}08$.

3/ On calcule la probabilité totale :

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = \frac{2}{3} \times 0{,}08 + \frac{1}{3} \times 0{,}05 = 0{,}07$$

$$P(D) = 0{,}07$$

4/ On calcule la probabilité conditionnelle suivante :

$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{2}{3} \times 0{,}08}{0{,}07} \approx 0{,}762$$

$$P_D(A) \approx 0{,}762$$

Exercice 2

Une entreprise produit en grande quantité des éléments préfabriqués en béton. On note $p = 0{,}10$ la probabilité qu'un élément présente un défaut. Tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

1/ On prélève dans cette production, successivement et avec remise, huit éléments. On note X la variable aléatoire qui associe le nombre d'éléments présentant un défaut parmi les huit éléments prélevés.
1.1/ On admet que X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.
1.2/ Calculer la probabilité des évènements suivants :

- A : "Il n'y a aucun élément avec un défaut" ;
- B : "Il y a au moins un élément avec un défaut" ;
- C : "Il y a exactement deux éléments avec un défaut".

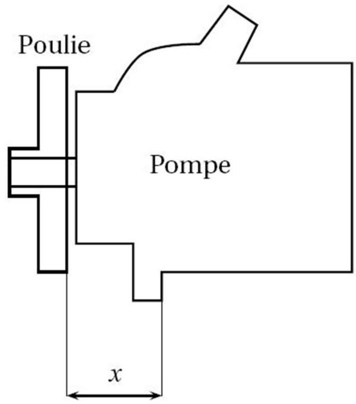
2/ En vue d'améliorer la qualité du produit, on décide de mettre en place un contrôle qui accepte tous les éléments sans défaut et seulement 20 % des éléments avec défaut. On prend au hasard un élément dans la production.

On considère les évènements suivants :

- D : "L'élément présente un défaut" ;
- E : "L'élément est accepté".

2.1/ Construire un arbre traduisant les données de l'énoncé.
2.2/ Calculer la probabilité qu'un élément soit accepté au contrôle.
2.3/ Justifier que la probabilité qu'un élément ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est égale à $0{,}022$ à 10^{-3} près.

Exercice 11



Une entreprise est spécialisée dans la fabrication de pompes hydrauliques pour des engins de levage. On s'intéresse au contrôle de qualité de l'emmanchement d'une poulie sur une des pompes hydrauliques d'une grue. Cet emmanchement est contrôlé par la mesure, en millimètres, de la cote x apparaissant sur la figure ci-contre.

L'installation de la poulie est considérée comme conforme lorsque la cote x appartient à l'intervalle $[39,85;40,15]$.

On note X la variable aléatoire qui à chaque ensemble pompe-poulie prélevé au hasard dans la production, associe sa cote x.
On suppose que X suit la loi normale de moyenne $\mu = 40\ \text{mm}$ et d'écart type $\sigma = 0,06\ \text{mm}$.

1/ Calculer la probabilité p_1 que la cote x d'un ensemble pompe-poulie prélevé au hasard dans la production soit conforme.
2/ On décide de modifier l'intervalle précédent. Calculer la valeur de h telle que la probabilité que la cote x appartienne à l'intervalle $[40-h;40+h]$ soit égale à $0,95$.

Solution

1/ Soit U la variable aléatoire définie par : $U = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$. Si X suit la loi normale $N(\mu,\sigma)$ alors U suit la loi normale $N(0,1)$.

On peut alors écrire l'égalité suivante :

$$p_1 = P(39,85 \le X \le 40,15) = P\left(\frac{39,85-\mu}{\sigma} \le U \le \frac{40,15-\mu}{\sigma}\right)$$

$$p_1 = P(-2,5 \le U \le 2,5)$$

$$p_1 = \Pi(2,5) - \Pi(-2,5) = \Pi(2,5) - [1-\Pi(2,5)] = 2\Pi(2,5) - 1$$

On utilise la table de la loi normale centrée réduite :

$$p_1 = 2(0,9938) - 1 \approx 0,988$$

La probabilité qu'une piève prélevée au hasard dans la production soit conforme est :

$$p_1 = 0,988$$

2/ On écrit l'égalité suivante :

$$0{,}95 = P(\mu - h \leq X \leq \mu + h) = P\left(\frac{\mu - h - \mu}{\sigma} \leq U \leq \frac{\mu + h - \mu}{\sigma}\right)$$

$$0{,}95 = P\left(\frac{-h}{\sigma} \leq U \leq \frac{h}{\sigma}\right)$$

$$0{,}95 = \Pi\left(\frac{h}{\sigma}\right) - \Pi\left(\frac{-h}{\sigma}\right) = \Pi\left(\frac{h}{\sigma}\right) - \left[1 - \Pi\left(\frac{h}{\sigma}\right)\right] = 2\Pi\left(\frac{h}{\sigma}\right) - 1$$

On obtient :

$$\Pi\left(\frac{h}{\sigma}\right) = \frac{1 + 0{,}95}{2} = 0{,}975$$

On utilise la table de la loi normale centrée réduite pour déterminer la valeur de $\frac{h}{\sigma}$ (lecture inverse de la table). On trouve :

$$\frac{h}{\sigma} = 1{,}96$$

d'où :

$$h = 1{,}96\sigma \approx 0{,}12$$

Pour $h = 0{,}12\,\mathrm{mm}$, la probabilité qu'une cote x soit dans l'intervalle $[39{,}88;40{,}12]$ est égale à $0{,}95$.

Exercice 12

On considère un stock important de bottes de paille, dont une partie est destinée à un usage d'isolation thermique. On prélève au hasard une botte de paille dans la production d'une journée donnée.

1/ On note X la variable aléatoire qui, à chaque botte ainsi prélevée, associe son épaisseur, exprimée en millimètres. On admet que X suit la loi normale de moyenne $\mu_1 = 360\,\mathrm{mm}$ et d'écart type $\sigma_1 = 18\,\mathrm{mm}$.
Calculer la probabilité $p_1 = P(350 \leq X \leq 370)$.

2/ On note Y, la variable aléatoire qui, à chaque botte prélevée dans la production de cette journée, associe sa masse volumique exprimée en $\mathrm{kg.m^{-3}}$. On admet que Y suit la loi normale de moyenne $\mu_2 = 100\,\mathrm{kg.m^{-3}}$ et d'écart type $\sigma_2 = 5\,\mathrm{kg.m^{-3}}$.
Calculer la probabilité p_2 qu'une botte, prélevée dans la production de cette journée, ait une masse volumique comprise entre $90\,\mathrm{kg.m^{-3}}$ et $110\,\mathrm{kg.m^{-3}}$.

Cet ouvrage a été achevé en octobre 2024
Dépôt légal : octobre 2024
Déposé auprès de la BnF (Bibliothèque Nationale de France)