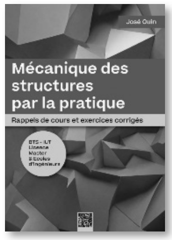
José Ouin
Ingénieur INSA Toulouse
Ancien élève de l'ENS Cachan
Professeur Agrégé de Génie civil
Professeur Agrégé de Mathématiques

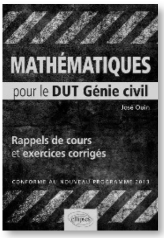
Bases mathématiques essentielles pour préparer l'entrée dans le supérieur

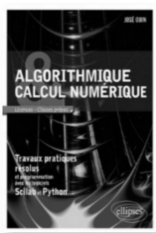
Tome 2 : Analyse

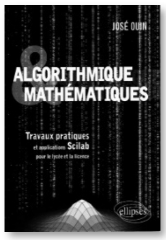
Rappels de cours et exercices corrigés

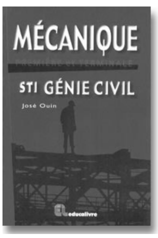
Du même auteur aux Editions Ellipses et Educalivre

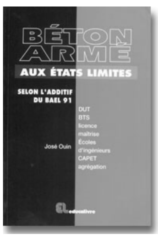












ISBN : 978-2-9593648-2-2

Avant-Propos

Cet ouvrage, conçu avec une attention particulière à la rigueur et à la clarté, a pour objectif d'accompagner les étudiants dans leur préparation aux études supérieures. En proposant des rappels de cours précis et des exercices résolus et détaillés, il constitue un support méthodique non seulement pour aborder les concepts fondamentaux des mathématiques, mais aussi pour réviser les notions acquises au lycée dans le cadre du baccalauréat.

Ce livre s'inscrit dans une série de quatre ouvrages (Algèbre, Analyse, Trigonométrie & Géométrie, Statistique & Probabilité), chacun dédié à une branche spécifique des mathématiques. Ces ouvrages offrent une progression cohérente et graduée, permettant aux étudiants de renforcer leurs bases tout en se préparant aux exigences des études post-baccalauréat.

Je suis convaincu que cette série saura répondre aux besoins des étudiants et des enseignants, en offrant un soutien précieux pour consolider les acquis en mathématiques et en faciliter l'application pratique dans le cadre de leurs études supérieures. Que ces livres deviennent des compagnons de confiance dans leur parcours académique et un tremplin vers la réussite.

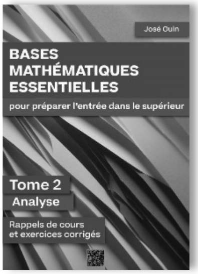
José Ouin
www.joseouin.fr

Présentation détaillée des quatre ouvrages suivants :

Bases mathématiques essentielles pour préparer l'entrée dans le supérieur

<table>
<tr><td>


ISBN : 978-2-9593648-1-5
</td><td>
Bases mathématiques essentielles pour préparer l'entrée dans le supérieur – Tome 1 : Algèbre

• Prérequis essentiels
• Calcul matriciel
• Fonctions polynômes
• Fonctions rationnelles
• Nombres complexes
</td></tr>
<tr><td>


ISBN : 978-2-9593648-2-2
</td><td>
Bases mathématiques essentielles pour préparer l'entrée dans le supérieur – Tome 2 : Analyse

• Fonction logarithme et fonction exponentielle
• Généralités sur les fonctions
• Fonctions réciproques
• Calcul intégral
• Équations différentielles
• Fonctions de plusieurs variables
• Opérateurs différentiels
• Calcul d'incertitudes
</td></tr>
<tr><td>


ISBN : 978-2-9593648-3-9
</td><td>
Bases mathématiques essentielles pour préparer l'entrée dans le supérieur – Tome 3 : Trigonométrie & Géométrie

• Prérequis essentiels (triangles)
• Trigonométrie
• Géométrie dans le plan
• Géométrie dans l'espace
</td></tr>
<tr><td>


ISBN : 978-2-9593648-4-6
</td><td>
Bases mathématiques essentielles pour préparer l'entrée dans le supérieur – Tome 4 : Statistique & Probabilité

• Statistique descriptive
• Ajustement linéaire
• Lois de probabilité
</td></tr>
</table>

Table des matières

Première partie

Fonction logarithme et fonction exponentielle

Deuxième partie

Généralités sur les fonctions

Troisième partie

Fonctions réciproques

4

Quatrième partie

Calcul intégral

5

Cinquième partie

Equations différentielles

6

Sixième partie

Fonctions de plusieurs variables

7 Septième partie

Opérateurs différentiels

8

Huitième partie

Calculs d’incertitudes

Première partie

Fonction logarithme et fonction exponentielle

John Napier (ou John Neper), né en 1550 à Merchiston, en Écosse, était un mathématicien, astronome et théologien écossais du XVIe siècle. Il est surtout connu pour son invention des logarithmes et pour son rôle dans le développement des mathématiques.

John Napier était issu d'une famille noble et a étudié à l'université de St Andrews. Il a hérité du domaine de Merchiston à l'âge de 21 ans après la mort de son père. Bien que John Napier ait étudié la théologie et la philosophie, il était surtout passionné par les mathématiques et l'astronomie.

Son travail le plus célèbre est la découverte des logarithmes, qui a été publiée dans son ouvrage "*Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*" en 1614. Les logarithmes, qui sont des outils mathématiques permettant de simplifier les calculs de multiplication et de division, ont révolutionné les domaines de l'astronomie, de l'ingénierie, de la navigation et de nombreuses autres disciplines. L'idée principale derrière les logarithmes est que la multiplication de deux nombres correspond à l'addition de leurs logarithmes. Cette découverte a grandement facilité les calculs longs et complexes qui étaient couramment nécessaires à l'époque.

Outre les logarithmes, John Napier a également travaillé sur d'autres sujets mathématiques et astronomiques. Il a notamment conçu des instruments pour l'observation des planètes et a développé des méthodes pour calculer les orbites des corps célestes.

John Napier est décédé en 1617 à l'âge de 67 ans, laissant derrière lui un héritage durable dans le monde des mathématiques. Son travail a jeté les bases de nombreux développements ultérieurs dans le domaine des mathématiques, et il est largement considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de l'histoire.

Pourquoi est-ce que les fonctions logarithme et exponentielle sont essentielles ?

Dans le vaste domaine des mathématiques, deux fonctions jouent un rôle crucial : le logarithme et l'exponentielle. Elles sont comme des outils essentiels dans la boîte à outils des mathématiciens, offrant des solutions à des problèmes complexes et ouvrant des portes à la compréhension de divers phénomènes.

La fonction exponentielle peut être vue comme une fonction magique qui modélise la croissance ou la décroissance exponentielle. Que ce soit pour représenter la croissance d'une population, la dégradation radioactive d'un élément, ou encore la charge d'un condensateur, la fonction exponentielle fournit un langage universel pour décrire ces phénomènes.

Exemple concret :
En physique, les éléments radioactifs subissent une désintégration au fil du temps, où le nombre de noyaux radioactifs décroît exponentiellement avec le temps. Cette décroissance suit une loi exponentielle, où la quantité de substance radioactive restante à un moment donné est proportionnelle à la quantité présente initialement, et cette décroissance est caractérisée par une constante spécifique appelée la demi-vie.

D'un autre côté, le logarithme peut être considéré comme un guide dans le monde des échelles et des proportions. Il aide à comprimer de larges gammes de nombres en échelles plus gérables et résout des problèmes impliquant des taux de croissance ou de décroissance constants.

Exemple concret :
Le pH est une mesure de l'acidité ou de la basicité d'une solution aqueuse. Il est défini comme le logarithme décimal de l'inverse de la concentration en ions hydrogène (H^+) dans la solution. En d'autres termes, le pH est une échelle logarithmique qui va de 0 à 14, où un pH de 7 est considéré comme neutre (ni acide ni basique), un pH inférieur à 7 indique une solution acide, et un pH supérieur à 7 indique une solution basique.

Ensemble, ces deux fonctions offrent une perspective unique pour résoudre une multitude de problèmes dans des domaines variés comme les sciences naturelles, l'ingénierie et l'économie.

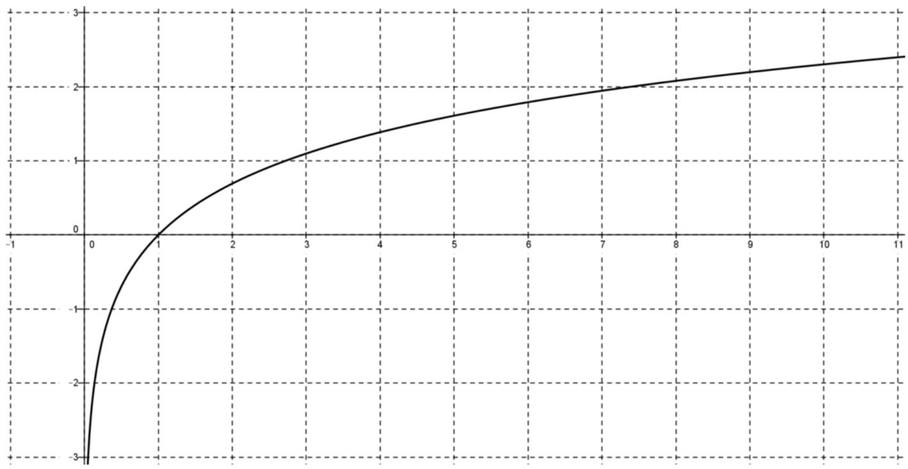
En explorant les propriétés des logarithmes et des exponentielles, en relevant des défis mathématiques, on peut découvrir les merveilles que ces fonctions peuvent révéler. En comprenant leur puissance, on acquiert une maîtrise plus profonde des mathématiques et une appréciation élargie du monde qui nous entoure.

Rappels de cours
Fonction logarithme et fonction exponentielle

1- Fonction logarithme népérien

1-1. Définition

La fonction logarithme népérien est la fonction notée ln. Les premières propriétés sont les suivantes :
(1) La fonction ln est définie pour des réels x strictement positifs : $x \in]0\,; +\infty[$;
(2) La dérivée de la fonction ln est la fonction inverse : $(ln(x))' = \frac{1}{x}$;
(3) La fonction ln s'annule en 1 : $ln(1) = 0$.



1-2. Propriété fondamentale de la fonction logarithme

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$ln(a \times b) = ln(a) + ln(b)$$

1-3. Autres règles de calcul

Pour tous réels a et b strictement positifs et n entier relatif :

$$ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\,ln(a)\,;\; ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln(a) - ln(b)\,;\; ln(a^n) = n \times ln(a)\,;\; ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}ln(a)$$

1-4. Sens de variation

La fonction $f : x \mapsto ln(x)$ est strictement croissante sur $D_f =]0\,;+\infty[$.

Limites aux bornes de D_f : $\lim\limits_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} ln(x) = -\infty$.

L'axe des ordonnées d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe de la fonction ln .

Tableau de variations de la fonction ln :

x	0		1		$+\infty$
$(ln(x))' = \frac{1}{x}$	$\|$		$+$		
$ln(x)$	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

1-5. Equations et inéquations

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$ln(a) = ln(b) \Leftrightarrow a = b\ ;\ ln(a) \leq ln(b) \Leftrightarrow a \leq b\ ;\ ln(a) \geq ln(b) \Leftrightarrow a \geq b$$

1-6. Le nombre e

Définition

Il existe un unique nombre, noté e, tel que $ln(e) = 1$.
Valeur approchée de e : $e \approx 2{,}7182818284$ ...

Théorème

Soit m un entier relatif : l'équation $ln(x) = m$ a pour unique solution $x = e^m$.

On a les équivalences suivantes :

(1) $ln(x) \geq m \Leftrightarrow x \geq e^m$
(2) $ln(x) \leq m \Leftrightarrow 0 < x \leq e^m$

Exercices pour s'entraîner

Exercice 1

Résoudre dans IR l'équation suivante :

$$ln(x^2-4) = ln(2x+11)$$

Solution

L'équation est définie pour les valeurs de x telles que :

$$\begin{cases} (x^2-4) > 0 \\ (2x+11) > 0 \end{cases}$$

- $(x^2-4) > 0$ pour $x \in]-\infty\,; -2[\cup]2\,; +\infty[$
- $(2x+11) > 0$ pour $x \in \left]-\frac{11}{2}; +\infty\right[$

Ces deux conditions donnent : $x \in \left]-\frac{11}{2}; -2\right[\cup]2\,; +\infty[$.

On écrit les équivalences suivantes :

$$ln(x^2-4) = ln(2x+11) \Leftrightarrow x^2-4 = 2x+11 \Leftrightarrow x^2-2x-15 = 0$$

Le trinôme $x^2-2x-15$ a deux racines évidentes : -3 et 5.

On en déduit la factorisation du trinôme :

$$ln(x^2-4) = ln(2x+11) \Leftrightarrow (x+3)(x-5) = 0$$

On en déduit la solution :

$$ln(x^2-4) = ln(2x+11) \text{ pour } x = -3 \text{ ou } x = 5.$$

$$S = \{-3\,; 5\}$$

Exercice 2

Résoudre dans IR l'inéquation suivante :

$$ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \leq 2$$

Solution

L'inéquation est définie pour les valeurs de x telles que :

$$\frac{x}{x-1} > 0$$

On sait que le signe de ce quotient est le même que le signe du produit $x(x-1)$.
D'après les rappels de la partie « **Prérequis essentiels** » on peut en déduire les valeurs de x telles que $x(x-1) > 0$ et donc le domaine de définition de cette inéquation.

L'inéquation est définie pour $x \in \,]-\infty\,; 0[\, \cup \,]1\,; +\infty[$.

On résout cette inéquation en écrivant les équivalences suivantes :

$$ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \leq 2 \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} \leq e^2 \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} - e^2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x(1-e^2)+e^2}{x-1} \leq 0$$

On établit le tableau de signes suivants :

x	$-\infty$		0		1		$\frac{e^2}{e^2-1}$		$+\infty$
$x(1-e^2)+e^2$		$+$				$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$			0	$+$		$+$	
$\frac{x(1-e^2)+e^2}{x-1}$		$-$	$\|$		$\|$	$+$	0	$-$	

On en déduit l'ensemble des solutions :

$$ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \leq 2 \text{ pour } x \in \,]-\infty\,; 0[\, \cup \left[\frac{e^2}{e^2-1}\,; +\infty\right[.$$

$$S = \,]-\infty\,; 0[\, \cup \left[\frac{e^2}{e^2-1}\,; +\infty\right[$$

Rappels de cours
Généralités sur les fonctions

1- Définitions

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.

Définition d'une fonction

Une fonction numérique f est une application qui, à tout réel x de son ensemble de définition D_f associe un unique nombre $y = f(x)$, appelée image de x par f.

$$f:\begin{cases} D_f \subset \text{ IR} \rightarrow \text{IR} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

Courbe représentative

La courbe représentative d'une fonction f, notée C_f, correspond à l'ensemble des points de coordonnées $(x\,; f\,(x))$ pour $x \in D_f$.

Symétries

➔ Si f est paire si, et seulement si :

$$\text{pour tout } x \in D_f,\ -x \in D_f \ \text{ et } f(-x) = f(x)$$

La courbe représentative C_f est symétrique par rapport à l'axe (Oy).

➔ Si f est impaire si, et seulement si :

$$\text{pour tout } x \in D_f,\ -x \in D_f \ \text{ et } f(-x) = -f(x)$$

La courbe représentative C_f est symétrique par rapport à O, l'origine du repère.

2- Continuité et dérivabilité d'une fonction

2-1. Continuité d'une fonction

➔ Continuité en un point a :

Une fonction f est continue en un point $a \in D_f$ si, et seulement si :

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = f(a)$$

On écrit :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

➔ Continuité sur I :

Une fonction f est continue sur un intervalle $I \subset D_f$ si elle est continue en tout point $a \in I$.

2-2. Dérivabilité d'une fonction

➔ Dérivabilité en un point a :

Une fonction f est dérivable en un point $a \in D_f$ si le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

a une limite finie lorsque x tend vers a.

On note alors :

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

On écrit :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

Autre écriture :

En posant $h = x - a$, on obtient :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

➔ Dérivabilité sur un intervalle I :

Une fonction f est dérivable sur un intervalle $I \subset D_f$ si elle est dérivable en tout point $a \in I$.

2-3. Différentielle d'une fonction

Soit f une fonction dérivable en a, alors : $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$

Il est équivalent d'écrire : $f(a+h) - f(a) = hf'(a) + h\varepsilon(h)$, avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

On pose : $\Delta_{a,h}(f) = f(a+h) - f(a)$

$\Delta_{a,h}(f)$ est la différence des ordonnées de deux points de la courbe C_f d'abscisses $a+h$ et a.

On a alors : $\Delta_{a,h}(f) = hf'(a) + h\varepsilon(h)$, avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

2-3.1 Définition de la différentielle d'une fonction

La différentielle de la fonction f au point d'abscisse a est la fonction :

$$df_a : h \mapsto hf'(a)$$

$df_a(h) = hf'(a)$ est la différence entre l'ordonnée du point d'abscisse $a+h$ de la tangente T et l'ordonnée du point d'abscisse a de la courbe C_f.

Remarque

Lorsque h est très petit, $\Delta_{a,h}(f) \approx df_a(h)$

Exercices pour s'entraîner

Dans toute cette partie, le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.

Exercice 1

L'hydratation de tout ciment est une réaction exothermique qui s'accompagne d'un dégagement de chaleur. On note $f(t)$ la valeur, en degrés Celsius, de la température de la réaction chimique à l'instant t , t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t = 0$, est : $f(0) = 10\ °C$.

La fonction f, solution d'une équation différentielle, est définie sur l'intervalle $I = [0\,;+\infty[$ par :

$$f(t) = (20t + 10)e^{-\frac{1}{2}t}$$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.

1/ Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

2/ Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.

3/ Établir que l'équation $f(t) = 10$ admet une unique solution α, strictement positive, dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

A l'aide de la calculatrice, donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de α.

4/ Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescend-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute près.

Solution

1/ On calcule la limite de la fonction f en $+\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} (20t + 10)e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} \left(40\frac{t}{2}e^{-\frac{1}{2}t} + 10e^{-\frac{1}{2}t}\right)$$

D'après le théorème des croissantes comparées :

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{2}e^{-\frac{1}{2}t} = \lim_{X\to+\infty} Xe^{-X} = 0$$

et

$$\lim_{t\to+\infty} 10e^{-\frac{1}{2}t} = 0$$

Finalement :

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$$

2/ On calcule la fonction dérivée :

$$f'(t) = 20e^{-\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2}(20t + 10)e^{-\frac{1}{2}t} = 5(-2t + 3)e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$f'(t) = 5(-2t + 3)e^{-\frac{1}{2}t}$$

Tableau de variations de la fonction f :

t	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	10	$\nearrow$	$18{,}9$	$\searrow$	0

3/ La fonction f est continue strictement décroissante sur $\left]\frac{3}{2} ; +\infty\right[$. $f\left(\frac{3}{2}\right) = 40e^{-\frac{3}{4}} \approx 18{,}9$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$. La valeur $10 \in \left[0 ; 40e^{-\frac{3}{4}}\right]$. On en déduit, d'après le théorème de la bijection, que l'équation $f(t) = 10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $\left]\frac{3}{2} ; +\infty\right[$. L'équation n'admet aucune solution dans l'intervalle $\left]0 ; \frac{3}{2}\right[$, on en déduit qu'il existe une unique solution dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

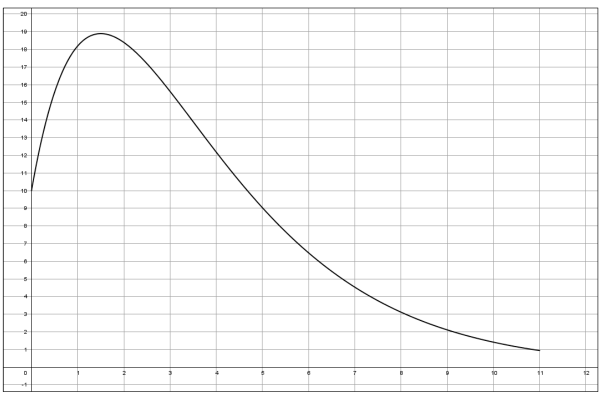
A l'aide de la calculatrice, on obtient :

$$\alpha = 4{,}67$$

4/ On obtient :

$$4{,}67 \text{ h} \approx 4 \text{ h } 40 \text{ min}$$

La température de cette réaction chimique redescendra à sa valeur initiale au bout de 4 heures et 40 minutes.



Rappels de cours
Fonctions réciproques

1- Images et antécédents

On considère une fonction f définie sur son ensemble de définition D_f et à valeurs dans IR.

Définitions

➔ Soit x un élément de D_f ; on appelle image de x par f le nombre $y = f(x)$.
➔ Soit y un nombre réel ; on appelle antécédent de y par f tout nombre $x \in D_f$ tel que $y = f(x)$.
➔ On appelle image de f, et on note $Im\, f$, l'ensemble des nombres réels ayant au moins un antécédent par f.

Exemple

Pour la fonction $f : x \mapsto \cos x$, l'image de f est : $Im\, f = [-1\,;1]$.

2- Fonction bijective

Soit f une fonction définie sur son ensemble de définition D_f. On définit deux intervalles : $I \subset D_f$ et $J \subset$ IR.

Définition

On dit que f est bijective de I vers J si tout nombre $y \in J$ n'admet qu'un seul et unique antécédent $x \in I$ par f.

Exemples

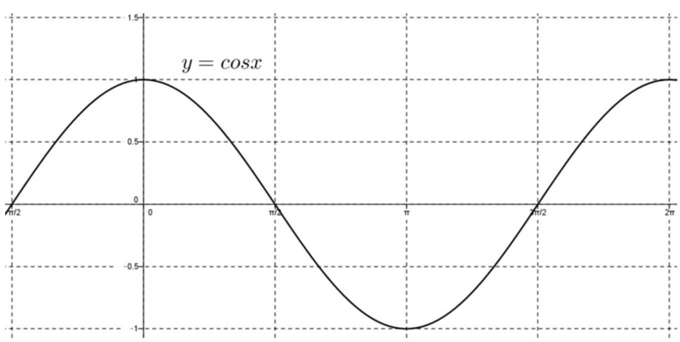
➔ La fonction $f : x \mapsto \cos x$ n'est pas bijective de IR vers IR car $1{,}4$ n'admet aucun antécédent par f dans IR.

➔ La fonction $f : x \mapsto \cos x$ n'est pas bijective de IR vers $[-1\,;1]$ car $0{,}5$ admet une infinité d'antécédents par f dans IR. Il s'agit des réels :

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\, k \in \mathbb{Z} \text{ et } x = -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi,\, k \in \mathbb{Z}$$

➔ La fonction $f : x \mapsto \cos x$ est bijective de $[0\,;\pi]$ vers $[-1\,;1]$ car pour tout $y \in [-1\,;1]$, il n'existe qu'un seul et unique antécédent $x \in [0\,;\pi]$ tel que $y = \cos x$.

Représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \cos x$:



3- Fonction réciproque

Soit f une fonction bijective de $I \subset D_f$ vers $J \subset$ IR.

3-1. Définition

On appelle fonction réciproque de la fonction f et on note f^{-1} la fonction définie sur J et qui, à tout nombre $y \in J$, associe son antécédent $x \in I$ par f.

Remarque
La fonction f^{-1} est également une fonction bijective et sa fonction réciproque est f.

Exemple
La fonction $f : x \mapsto cos\, x$ est bijective de $[0\,;\pi]$ vers $[-1\,;1]$.
Sa fonction réciproque est : $f^{-1} : x \mapsto Arccos\, x$ et f^{-1} est bijective de $[-1\,;1]$ vers $[0\,;\pi]$.

3-2. Propriétés fondamentales

Soit f une fonction bijective de $I \subset D_f$ vers $J \subset$ IR et f^{-1} sa fonction réciproque. On rappelle les propriétés suivantes :
(1) $D_{f^{-1}} = J$ et $Imf^{-1} = I$

(2) $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \quad \forall x \in I, \quad \forall\, y \in J$

(3) $f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall\, x \in I$

(4) $f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall\, y \in J$

Exemple
On considère les fonctions $ln\, x$ et e^x. La fonction $f : x \mapsto ln\, x$ est bijective de IR^{+*} vers IR et sa fonction réciproque $f^{-1} : y \mapsto e^y$ est définie sur IR et à valeurs dans IR^{+*}.

On a les relations suivantes :
(1) $y = ln(\,x) \Leftrightarrow x = e^y \quad \forall\, x \in \text{IR}^{+*}, \forall\, y \in \text{IR}$

(2) $e^{ln\, x} = x \quad \forall\, x \in \text{IR}^{+*}$

(3) $ln(e^y) = y \quad \forall\, y \in \text{IR}$

3-3. Théorème

Si f une fonction continue et strictement monotone sur $I \subset D_f$ alors f est bijective de l'intervalle I vers l'intervalle $J = f(I)$.
De plus sa fonction réciproque f^{-1} est :

- définie et continue sur J ;
- strictement monotone sur J avec le même sens de variation que f.

Exercices pour s'entraîner

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur IR^* par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

1/ Montrer que la restriction de f à $[1\,;+\infty[$ est une bijection de $[1\,;+\infty[$ sur $[1\,;+\infty[$

2/ Déterminer sa bijection réciproque, notée f^{-1}

Rappel sur les équations du second degré. Si x_1 et x_2 sont solutions de l'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Solution

1/ On commence par calculer la fonction dérivée :

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2 - 1}{2x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{2x^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{2x^2}$$

On en déduit que $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in [1\,;+\infty[$. La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$

$f(1) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$: on en déduit que la fonction f est bijective de $I = [1\,;+\infty[$ vers l'intervalle $J = [1\,;+\infty[$

D'après le théorème du cours, la fonction f admet donc une bijection réciproque f^{-1} de $J = [1\,;+\infty[$ vers l'intervalle $I = [1\,;+\infty[$

2/ Soit $x \in [1\,;+\infty[$ et $y \in [1\,;+\infty[$ tels que $y = f(x)$
On écrit les équivalences suivantes :

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow 2y = x + \frac{1}{x}$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow x^2 - 2yx + 1 = 0$$

On résout l'équation du second degré $x^2 - 2yx + 1 = 0$ et on trouve les deux racines suivantes :

$$x_1 = y + \sqrt{y^2 - 1} \quad \text{et} \quad x_2 = y - \sqrt{y^2 - 1}$$

$y \in [1\,; +\infty[$ donc $x_1 = y + \sqrt{y^2 - 1} \in [1\,; +\infty[$

On sait que $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = 1$, donc $x_2 = \frac{1}{x_1}$ et $x_2 \notin [1\,; +\infty[$

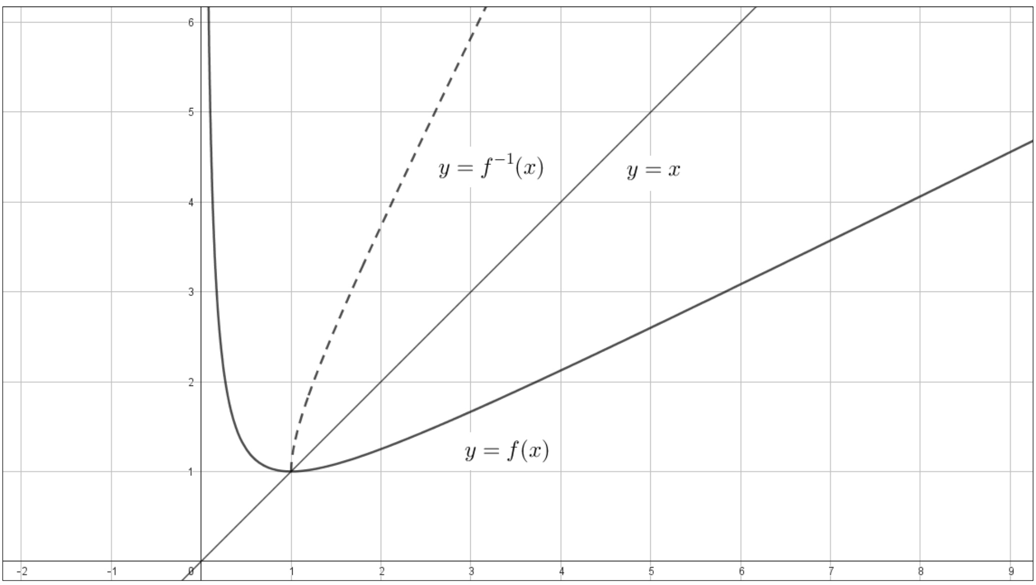
On en déduit l'équivalence suivante :

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

La fonction réciproque est définie pour tout $x \in J$ par :

$$f^{-1}(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

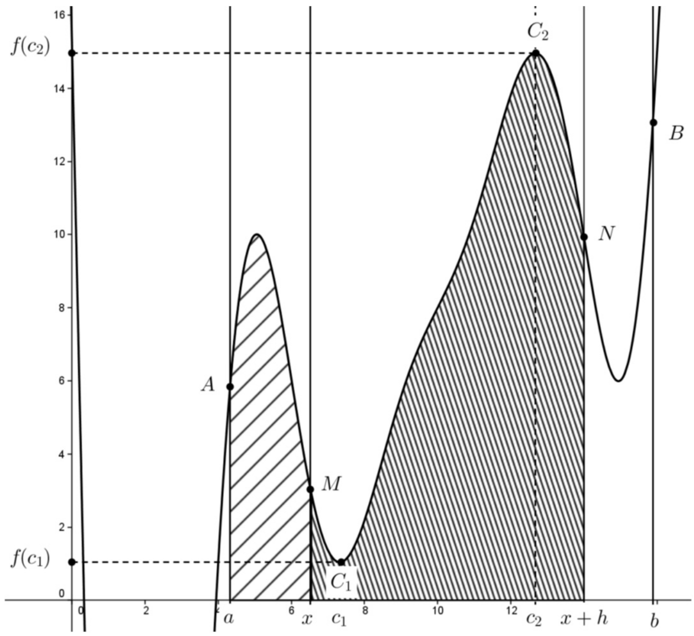
Le graphique ci-dessous représente les courbes des deux fonctions étudiées, symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$:



Rappels de cours
Calcul intégral

1- Aires et primitives

On considère une fonction f positive et continue sur un intervalle $[a\,;b]$ et on note C_f sa représentation graphique.



Soit x un réel quelconque de l'intervalle $]a\,;b\,[$. On note $G(x)$ l'aire du domaine hachuré sur la figure. La différence $G(x+h)-G(x)$ est l'aire du domaine grisé sur la figure. On note c_1 et c_2 les abscisses respectives du minimum et du maximum de la fonction f sur l'intervalle $[x\,;x+h]$. La différence $G(x+h)-G(x)$ est encadrée par les aires de deux rectangles de même base h et de hauteur $f(c_1)$ pour l'un et $f(c_2)$ pour l'autre. On obtient donc l'encadrement suivant :

$$hf(c_1) \leq G(x+h)-G(x) \leq hf(c_2)$$

En divisant par h on obtient :

$$f(c_1) \leq \frac{G(x+h)-G(x)}{h} \leq f(c_2)$$

Lorsque h tend vers 0, les nombres c_1 et c_2 tendent vers x donc $f(c_1)$ et $f(c_2)$ tendent vers $f(x)$ car la fonction f est continue au point d'abscisse x.
Par conséquent :

$$\lim_{h\to 0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h} = f(x)$$

Ce qui signifie que la fonction G est dérivable au point x et que $G\,'(x) = f(x)$. On dit que G est une primitive de f et comme $G(a) = 0$, G est la primitive de la fonction f qui s'annule en a. On utilise la notation suivante :

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

1-1. Primitive d'une fonction

On appelle primitive d'une fonction f continue sur un intervalle I toute fonction F dérivable sur I et de dérivée f :

$$F\,'(x) = f(x)$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est la primitive de f qui s'annule pour $x = a$

Remarque
Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.

En effet, si f est continue sur I alors F est dérivable sur I, de dérivée f. Une fonction dérivable est continue donc F est continue sur I.

1-2. Nombre de primitives d'une fonction

Deux primitives d'une même fonction f diffèrent d'une constante. Si $F\,' = G\,' = f$ alors $F = G + C$ où C est une constante réelle.

Remarques
(1) Une primitive est définie sur un seul intervalle et non sur une réunion d'intervalles.
(2) Il n'existe qu'une seule primitive qui prend la valeur y_0 pour une valeur $x_0 \in I$ donnée.

Exemples
1. Détermination d'une primitive de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $I_1 =]0\,; +\infty[$:
$F_1(x) = ln(x)$ est une primitive de f sur $I_1 =]0\,; +\infty[$
En effet, $F_1{}'(x) = \frac{1}{x} = f(x)$

2. Détermination d'une primitive de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $I_2 =]-\infty;0[$:
$F_2(x) = ln(-x)$ est une primitive de f sur $I_2 =]-\infty\,; 0\,[$
En effet, $F_2{}'(x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} = f(x)$.

On écrit en général que $F(x) = ln|x|$ est une primitive de $f(x) = \frac{1}{x}$ sur I_1 ou sur I_2 mais pas sur $I_1 \cup I_2$

Exercices pour s'entraîner

Dans toute cette partie, le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$

Exercice 1

On s'intéresse à des courbes servant de modèle à la distribution de la masse salariale d'une entreprise. Les fonctions f associées définies sur l'intervalle $[0\,;1]$ doivent vérifier les conditions suivantes :

(1) : $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$;

(2) : f est croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$;

(3) : pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$: $f(x) \leq x$

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$

- **Partie A**

On étudie un modèle donné. On appelle g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$g(x) = xe^{x-1}$$

1/ Prouver que g vérifie les conditions (1) et (2)
2/ Démontrer l'égalité suivante :

$$g(x) - x = \frac{x}{e}(e^x - e)$$

En déduire que g vérifie la condition (3)
3/ Tracer les droites d'équations $y = x$ et $x = 1$ ainsi que la courbe représentative C_g de la fonction g.

- **Partie B**

On souhaite effectuer des calculs d'indices et étudier leurs évolutions. Pour une fonction f vérifiant les conditions (1), (2) et (3), on définit un indice I_f égal à l'aire exprimée en unité d'aire, du domaine du plan délimité par les droites d'équations $y = x$ et $x = 1$ et la courbe représentative C_f de la fonction f

1/ Justifier que $I_f = \int_0^1 [x - f(x)]dx$

2/ À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'indice I_g , associé à g

3/ On s'intéresse aux fonctions f_n, définies sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{2x^n}{1+x}$$

où n est un entier naturel supérieur en égal à 2

On admet que ces fonctions vérifient les conditions (1), (2) et (3), et on se propose d'étudier l'évolution de leurs indices I_n lorsque n tend vers l'infini.

3-1/ On pose :

$$I_n = \int_0^1 [x - f_n(x)]dx \text{ et } u_n = \int_0^1 f_n(x)dx$$

Prouver que $I_n = \frac{1}{2} - u_n$

3-2/ Comparer $\frac{t^{n+1}}{1+t}$ et $\frac{t^n}{1+t}$ sur l'intervalle $[0\,;1]$. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

3-3/ Prouver que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$:

$$0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n$$

3-4/ En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 2$: $0 \leq u_n \leq \frac{2}{n+1}$

3-5/ Déterminer alors la limite de l'indice I_n lorsque n tend vers l'infini.

Solution

1/ On étudie la fonction $g(x) = xe^{x-1}$. On a les valeurs suivantes :

$$g(0) = 0 \text{ et } g(1) = 1$$

On calcule la fonction dérivée :

$$g'(x) = e^{x-1} + xe^{x-1} = (1+x)e^{x-1}$$

$$g'(x) = (1+x)e^{x-1}$$

$g'(x) > 0$ pour $x \in [0\,;1]$. La fonction g est croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$. La fonction g vérifie les conditions (1) et (2)

2/ On écrit la différence demandée :

$$g(x) - x = xe^{x-1} - x = x(e^{x-1} - 1)$$

$$g(x) - x = xe^{-1}(e^x - e) = \frac{x}{e}(e^x - e)$$

$$g(x) - x = \frac{x}{e}(e^x - e)$$

La fonction exponentielle est une fonction croissante. On a donc les équivalences suivantes :
Pour $x \in [0\,;1]$:

$$x \leq 1 \Leftrightarrow e^x \leq e^1 \Leftrightarrow (e^x - e) \leq 0$$

Rappels de cours
Equations différentielles

1- Définitions

1-1. Équation différentielle

On appelle équation différentielle, une équation où interviennent une fonction et une ou plusieurs de ses dérivées successives.

$$f(x, y, y', y'') = 0 \text{ ou } f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

Exemple :

Soit $C(t)$ la concentration d'alcool dans le sang au temps t. $C(t)$ et sa fonction dérivée $\frac{dC}{dt}$ vérifient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dC}{dt} + C = ke^{-t}$$

Résolution d'une équation différentielle

Résoudre une équation différentielle sur un intervalle I, c'est déterminer l'ensemble des fonctions dérivables sur I qui vérifient cette équation. La résolution d'équations différentielles est un outil indispensable pour l'étude de l'évolution des phénomènes physiques en général. En effet, les équations traduisant les évolutions physiques sont très souvent des équations différentielles.

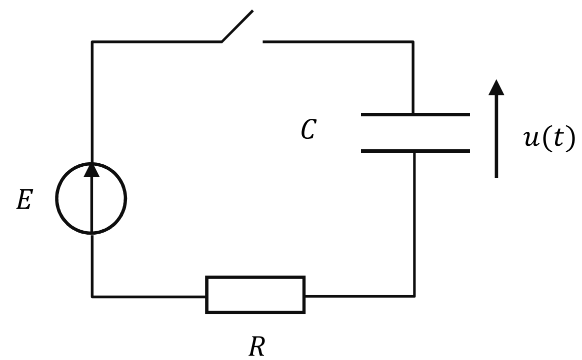
Exemple

En physique, dans un circuit RC, la tension $u(t)$ aux bornes d'un condensateur est solution de l'équation différentielle suivante :

$$u' + \frac{1}{\tau}u = \frac{E}{\tau}$$

où E est la tension continue délivrée par le générateur et $\tau = RC$ la constante de temps du circuit.
La solution $u(t)$ est :

$$u(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



Courbe intégrale

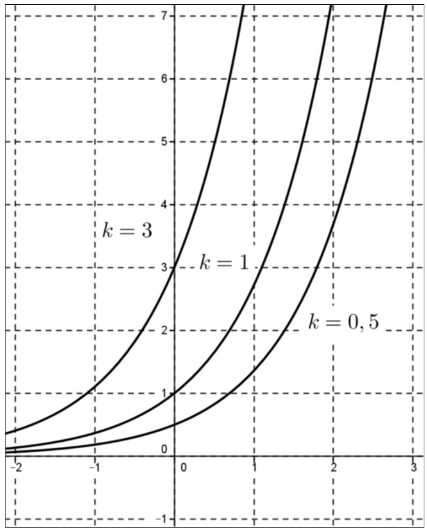
La représentation graphique d'une des solutions d'une équation différentielle est appelée courbe intégrale.

Exemple
Soit l'équation différentielle (E) :

$$y' - y = 0$$

La famille de fonctions $f(x) = ke^x$ où k est un réel, sont solutions de l'équation différentielle (E).

Le graphique ci-contre représente les courbes intégrales pour trois valeurs de k.



1-2. Ordre d'une équation différentielle

L'ordre d'une équation différentielle est donné par la dérivée d'ordre le plus élevé présente dans l'équation.

Exemples
➔ Équations différentielles d'ordre 1 :
(1) $y' - f = 0$ où f est une fonction donnée.
(2) $yy' - 1 = 0$
(3) $y' - x^2y = 0$

➔ Équations différentielles d'ordre 2 :
(1) $y'' + 2y' + y = 0$
(2) $y'' + 3y = sin\, x$

1-3. Équation différentielle à variables séparables

Une équation différentielle est dite à variables séparables lorsqu'elle peut s'écrire sous la forme :

$$(\phi(y))' = f(x) \text{ où } f \text{ est une fonction donnée.}$$

On résout alors l'équation différentielle en cherchant une primitive des deux membres de l'équation :

$$(\phi(y))' = f(x) \Leftrightarrow \phi(y) = F(x) + C$$

où F est une primitive de f et C une constante réelle.

Exemple
Résoudre l'équation différentielle (E) : $3xy' = y$ où y est une fonction non nulle et $x \in]0\,;+\infty[$.

Solution
L'équation (E) s'écrit :

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3x}$$

Exercices pour s'entraîner

Exercice 1

On désire étudier l'évolution du taux d'alcoolémie chez une personne de corpulence moyenne. On note $f(t)$ le taux d'alcoolémie (en gramme par litre) dans le sang à l'instant t (en heure). f est la solution définie sur IR^+ de l'équation différentielle (E) :

$$y' + y = 5e^{-t}$$

vérifiant $f\ (0) = 0$ car la personne qui consomme à $t = 0$ n'a pas encore d'alcool dans le sang donc $f(0) = 0\ \mathrm{g/L}$

1/ Déterminer l'expression de la fonction $f(t)$ du taux d'alcoolémie en fonction du temps t.

2/ A l'aide d'une étude graphique sur la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps cette personne peut prendre le volant ? (le taux maximal autorisé par la loi en France est : $0{,}5\ \mathrm{g/L}$).

Solution

1/ Expression de la fonction $f(t)$

On commence par résoudre l'équation différentielle sans second membre (E_0) :

$$y' + y = 0$$

On obtient : $\frac{y_0'}{y_0} = -1$; $ln|y_0(t)| = -t + k, k \in\ \mathrm{IR}$

$$|y_0(t)| = e^k.e^{-t}, k \in\ \mathrm{IR}.$$

La solution $y_0(t)$ est :

$$y_0(t) = K.e^{-t}, K \in\ \mathrm{IR}.$$

On détermine ensuite une solution particulière $y_p(x)$. On utilise la méthode de variation de la constante. On pose donc :

$y_p(t) = c(t)e^{-t}$, où c est une fonction.

On remplace dans l'équation différentielle (E) :

$$y_p'(t) + y_p(t) = 5e^{-t}$$

$$c'(t)e^{-t} - c(t)e^{-t} + c(t)e^{-t} = 5e^{-t}$$

$$c'(t) = 5$$

$$c(t) = 5t$$

On obtient :

$$y_p(t) = 5te^{-t}$$

On en déduit la solution générale :

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t)$$

$$y(t) = K.e^{-t} + 5te^{-t}, K \in \text{IR}.$$

La condition initiale : $f\ (0) = \ 0$ permet de déterminer la constante K :

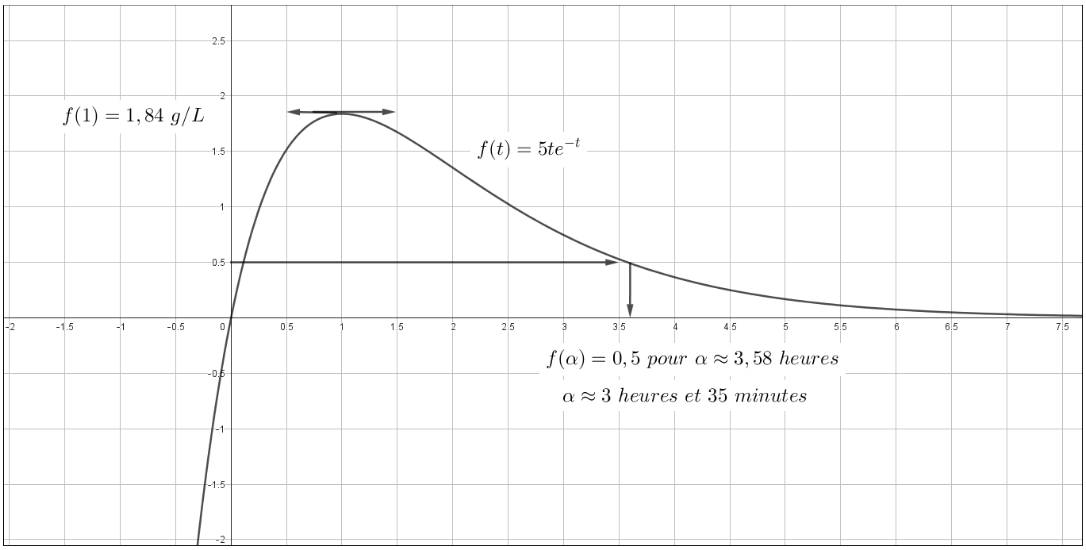
$$K = 0$$

Le taux d'alcoolémie a donc l'expression suivante :

$$f(t) = 5te^{-t}$$

2/ Etude graphique

Le graphique ci-dessous représente l'évolution du taux d'alcoolémie $f(t)$ en fonction du temps t en heures :



Le taux d'alcoolémie atteint son maximum au bout d'une heure ($1{,}84$ g/L).
Il faut attendre 3 heures et 35 minutes pour que le taux d'alcoolémie soit inférieur à $0{,}50$ g/L. On en déduit que la personne ne pourra prendre le volant qu'au bout de 3 heures et 35 minutes.

Rappels de cours
Fonctions de plusieurs variables

On étudie les fonctions de deux variables. Les fonctions de trois variables seront présentées dans la partie relative aux opérateurs différentiels.

1- Généralités

1-1. Définition

Une fonction f de deux variables réelles est une application de IR^2 dans IR :

$$\begin{cases} f\ :\ \mathrm{IR}^2 \to \mathrm{IR} \\ (x\,;y) \mapsto f(x,y) \end{cases}$$

On note D_f l'ensemble de définition de la fonction f. D_f est l'ensemble des couples $(x\,;y)$ pour lesquels $f(x,y)$ existe.

Exemple :

$$f(x,y) = \frac{1}{x-y}$$

D_f est le plan privé des points de la droite d'équation $y = x$.

1-2. Dérivées partielles

1-2.1 Définition de la dérivée partielle

➔ Dérivée partielle de f par rapport à la variable x

On appelle dérivée partielle de f par rapport à la variable x la dérivée de la fonction f vue comme fonction de la seule variable x, c'est-à-dire en considérant la variable y comme une constante. Cette dérivée partielle est elle-même une fonction de deux variables et on la note :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

➔ Dérivée partielle de f par rapport à la variable y

De la même façon, on définit la dérivée partielle de f par rapport à la variable y :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Une fonction de deux variables a donc deux dérivées partielles.

Exemple
Soit f la fonction définie sur IR^2 par :
$$f(x, y) = x^4 + xy - 3y^2$$

On obtient les dérivées partielles suivantes :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 + y$$
et
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - 6y$$

1-2.2 Dérivées partielles secondes

Si on dérive une fonction f par rapport à la première variable x et si on dérive à nouveau le résultat par rapport à la variable y, on obtient une nouvelle fonction appelée dérivée partielle seconde (ou dérivée partielle d'ordre 2), notée :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Le théorème de Schwarz précise que si la fonction f admet des dérivées partielles d'ordre 2 suivant les variables x et y alors :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Remarque
L'ordre dans lequel on dérive n'a pas d'incidence sur le résultat. Si on dérive deux fois de suite suivant la variable x, on note cette dérivée partielle seconde :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Exemple
Soit f la fonction définie sur IR^2 par :
$$f(x, y) = 3x^4 - 2x^3y^2 + 5y^3$$

On obtient les dérivées partielles suivantes :

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 12x^3 - 6x^2y^2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -4x^3y + 15y^2$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) = -12x^2y$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = -12x^2y$

On vérifie bien l'égalité suivante :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$$

On obtient les dérivées partielles secondes suivantes :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 36x^2 - 12xy^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -4x^3 + 30y$$

Exercices pour s'entraîner

Exercice 1

Déterminer les points critiques de la fonction suivante et préciser s'il s'agit d'extrema.

$$f(x,y) = 1 + x + y + x^2 - xy + y^2$$

Solution

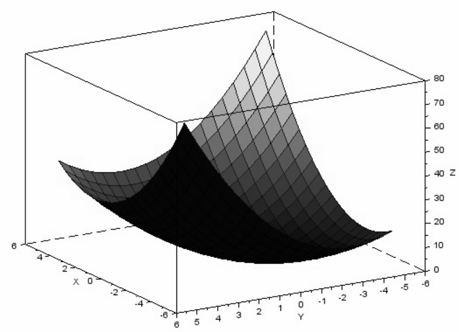
$$f(x,y) = 1 + x + y + x^2 - xy + y^2$$

On calcule les dérivées partielles suivantes :

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 + 2x - y$; $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 - x + 2y$; $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$

et $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -1$



- Recherche d'un point critique :

$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$ s'écrit : $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ -x + 2y = -1 \end{cases}$

On obtient $x_C = -1$ et $y_C = -1$.

Détermination du type d'extremum :

$detH_f(x_C, y_C) = rt - s^2 = 4 - 1 = 3 > 0$ et $r = 2 > 0$.

Le point $C(-1\,;-1)$ est un minimum pour la fonction f

Exercice 2

Déterminer les points critiques de la fonction suivante et préciser s'il s'agit d'extrema.

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y$$

Solution

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y$$

On calcule les dérivées partielles suivantes :

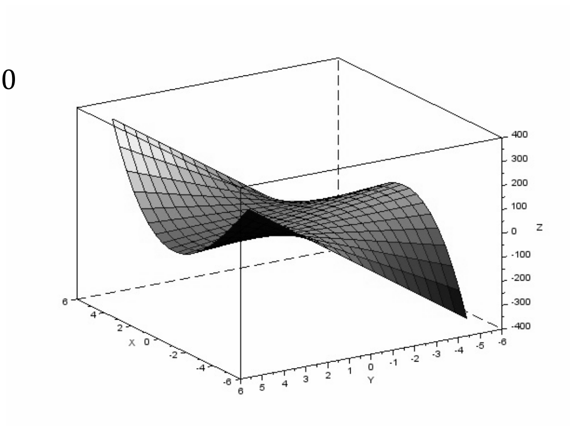
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 6xy - 15$; $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x + 6y$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2 - 12$; $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$

et $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6x$

- Recherche de points critiques :

$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$ s'écrit : $\begin{cases} 3x^2 + 6xy - 15 = 0 \\ 3x^2 - 12 = 0 \end{cases}$



On obtient les deux solutions suivantes :

$C_1\left(2\,;\frac{1}{4}\right)$ et $C_2\left(-2\,;-\frac{1}{4}\right)$

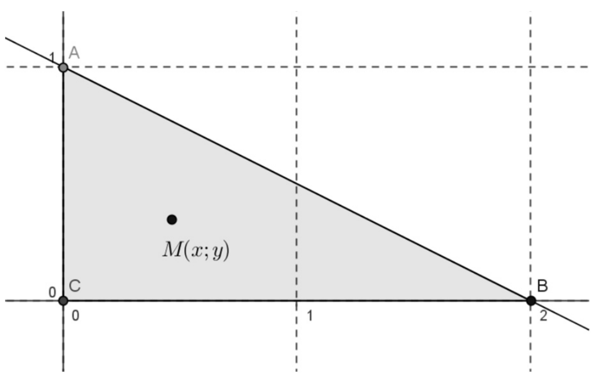
- Détermination du type d'extremum :

$detH_f(x,y) = rt - s^2 = -36x^2 < 0.$

La fonction f ne possède aucun extremum.

Exercice 3

La figure ci-dessous schématise la vue en plan du vestibule d'entrée d'un bâtiment (une unité correspond à trois mètres). Un éclairagiste souhaite placer un luminaire au point M de telle sorte que la somme des carrés des distances du point M aux trois parois, notée $f(x,y)$, soit minimale.



Rappels de cours
Les opérateurs différentiels

1- Fonctions de trois variables

On considère la température dans une plaque en acier dont une partie est exposée au rayonnement solaire. La température T en un point $M(x\,;y)$ de la plaque est une fonction des variables x et y. On écrira : $T = f(x,y)$.

Remarques

(1) Dans l'exemple de cette plaque, le temps intervient également dans l'évolution de la température T. On pourrait considérer une fonction de trois variables : $T = g(x,y,t)$.

(2) La température, en fonction du temps, en un point $M(x\,;y\,;z)$ d'une des poutres d'une charpente métallique est une fonction de quatre variables : $T = h(x,y,z,t)$.

1-1. Définition

Une fonction de trois variables réelles est une application de IR^3 dans IR.

$$\begin{cases} f\,:\ \mathrm{IR}^3 \to \mathrm{IR} \\ (x\,;y\,;z) \mapsto f(x,y,z) \end{cases}$$

D_f est l'ensemble de définition de la fonction f, ensemble des triplets $(x\,;y\,;z)$ pour lesquels $f(x,y,z)$ existe.

1-2. Dérivées partielles d'une fonction de trois variables

1-2.1 Dérivées partielles

On appelle dérivée partielle de f par rapport à la variable x la dérivée, quand elle existe, de la fonction f vue comme fonction de la seule variable x, c'est-à-dire en considérant les variables y et z comme des constantes.

Cette dérivée partielle est elle-même une fonction de trois variables et on la note :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$$

De la même façon, on définit les dérivées partielles de f par rapport aux variables y et z :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$$

Une fonction de trois variables a donc trois dérivées partielles.

Exemple
Détermination du volume d'une caisse cubique de côté L avec $L = 2\text{ m} \pm 0{,}05\text{ m}$
Ici $V = f(L) = L^3$ et $f'(L) = 3L^2$

Ainsi $\Delta V = |f'(2)| \times \Delta L = |3(2)^2| \times 0{,}05 = 0{,}6\text{ m}^3$.
Finalement :

$$V = 8{,}0\text{ m}^3 \pm 0{,}6\text{ m}^3$$

3- Conventions d'écriture

➔ Cas où l'incertitude absolue ΔG est inférieure à 1 :
La calculatrice donne les résultats suivants :

$$G = 127{,}43718 \text{ unités S.I. et } \Delta G = 0{,}05340295 \text{ unités S.I.}$$

Les conventions d'écriture sont les suivantes :
(1) On ne conserve qu'un seul chiffre non nul pour incertitude absolue ΔG :

$$\Delta G = 0{,}05 \text{ unités S.I.}$$

(2) On garde la même précision pour la valeur mesurée G et la valeur de l'incertitude absolue ΔG. Dans cet exemple, on arrondit G au centième d'unité près :

$$G = 127{,}44 \text{ unités S.I.}$$

(3) On ne conserve que deux chiffres significatifs pour la valeur de l'incertitude relative. Cependant, le calcul est réalisé avec toutes les décimales connues pour G et ΔG. On a ici :

$$\frac{\Delta G}{G} = 0{,}042\%$$

➔ Cas où l'incertitude absolue ΔG est supérieure à 1 :
La calculatrice donne les résultats suivants :

$$G = 3127{,}4718 \text{ unités S.I. et } \Delta G = 18{,}340295 \text{ unités S.I.}$$

Les conventions d'écriture sont les suivantes :
(1) On ne conserve qu'un seul chiffre non nul pour incertitude absolue ΔG :

$$\Delta G = 20 \text{ unités S.I.}$$

(2) On garde la même précision pour la valeur mesurée G et la valeur de l'incertitude absolue ΔG. Dans cet exemple, on arrondit G à la dizaine d'unités près :

$$G = 3130 \text{ unités S.I.}$$

(3) On ne conserve que deux chiffres significatifs pour la valeur de l'incertitude relative. Cependant, le calcul est réalisé avec toutes les décimales connues pour G et ΔG. On a ici :

$$\frac{\Delta G}{G} = 0{,}59\%$$

Exercices pour s'entraîner

Exercice 1

On donne les résultats de calculs affichés sur l'écran de la calculatrice. Ecrire les résultats et les incertitudes absolues avec le bon nombre de chiffres significatifs.

1/
Valeur calculée :$A = 845{,}74$ unités S.I.
Incertitude calculée : $\Delta A = 2{,}65$ unités S.I.

2/
Valeur calculée : $A = 11676$ unités S.I
Incertitude calculée : $\Delta A = 94{,}4$ unités S.I.

3/
Valeur calculée : $A = 11676$ unités S.I.
Incertitude calculée : $\Delta A = 98{,}1$ unités S.I.

4/
Valeur calculée : $A = 0.01863$ unités S.I.
Incertitude calculée : $\Delta A = 0.00023$ unités S.I.

5/
Valeur calculée : $A = 10{,}14617$ unités S.I.
Incertitude calculée : $\Delta A = 0{,}214$ unités S.I.

Solution

On considère un seul chiffre significatif pour ΔA puis on arrondit la valeur de A en conséquence.
On obtient les résultats suivants :

Question	A	ΔA
1	846	3
2	11680	90
3	11700	100
4	0,0186	0,0002
5	10,1	0,2

Exercice 2

1/ Soit f la fonction définie par :

$$f(x, y, z) = xy^2\sqrt{z}$$

On considère les coordonnées suivantes :

$$(x_0; y_0; z_0) = (1\,; 2\,; 4)$$

Calculer les dérivées partielles suivantes :

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$

2/ Soit f la fonction définie par :

$$f(x, y, z) = \frac{x^3 y}{z}$$

On considère les coordonnées suivantes :

$$(x_0; y_0; z_0) = (1\,; 1\,; 2)$$

Calculer les dérivées partielles suivantes :

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$

Solution

1/ Soit f la fonction définie par :

$$f(x, y, z) = xy^2\sqrt{z}$$

On obtient les résultats suivants :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = y^2\sqrt{z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 8$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2xy\sqrt{z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 8$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{xy^2}{2\sqrt{z}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 1$$

2/ Soit f la fonction définie par :

$$f(x, y, z) = \frac{x^3 y}{z}$$

Cet ouvrage a été achevé en octobre 2024
Dépôt légal : octobre 2024
Déposé auprès de la BnF (Bibliothèque Nationale de France)