José Ouin
Ingénieur INSA Toulouse
Ancien élève de l'ENS Cachan
Professeur Agrégé de Génie civil
Professeur Agrégé de Mathématiques

Bases mathématiques essentielles pour préparer l'entrée dans le supérieur

Tome 1 : Algèbre

Rappels de cours et exercices corrigés

Du même auteur aux Editions Ellipses et Educalivre

ISBN : 978-2-9593648-1-5

Avant-Propos

Cet ouvrage, conçu avec une attention particulière à la rigueur et à la clarté, a pour objectif d'accompagner les étudiants dans leur préparation aux études supérieures. En proposant des rappels de cours précis et des exercices résolus et détaillés, il constitue un support méthodique non seulement pour aborder les concepts fondamentaux des mathématiques, mais aussi pour réviser les notions acquises au lycée dans le cadre du baccalauréat.

Ce livre s'inscrit dans une série de quatre ouvrages (Algèbre, Analyse, Trigonométrie & Géométrie, Statistique & Probabilité), chacun dédié à une branche spécifique des mathématiques. Ces ouvrages offrent une progression cohérente et graduée, permettant aux étudiants de renforcer leurs bases tout en se préparant aux exigences des études post-baccalauréat.

Je suis convaincu que cette série saura répondre aux besoins des étudiants et des enseignants, en offrant un soutien précieux pour consolider les acquis en mathématiques et en faciliter l'application pratique dans le cadre de leurs études supérieures. Que ces livres deviennent des compagnons de confiance dans leur parcours académique et un tremplin vers la réussite.

José Ouin
www.joseouin.fr

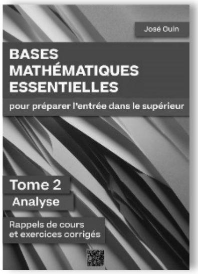
Présentation détaillée des quatre ouvrages suivants :

Bases mathématiques essentielles pour préparer l'entrée dans le supérieur

<table>
<tr>
<td>


ISBN : 978-2-9593648-1-5
</td>
<td>
Bases mathématiques essentielles pour préparer l'entrée dans le supérieur – Tome 1 : Algèbre

Prérequis essentiels
Calcul matriciel
Fonctions polynômes
Fonctions rationnelles
Nombres complexes

</td>
</tr>
<tr>
<td>


ISBN : 978-2-9593648-2-2
</td>
<td>
Bases mathématiques essentielles pour préparer l'entrée dans le supérieur – Tome 2 : Analyse

Fonction logarithme et fonction exponentielle
Généralités sur les fonctions
Fonctions réciproques
Calcul intégral
Équations différentielles
Fonctions de plusieurs variables
Opérateurs différentiels
Calcul d'incertitudes

</td>
</tr>
<tr>
<td>


ISBN : 978-2-9593648-3-9
</td>
<td>
Bases mathématiques essentielles pour préparer l'entrée dans le supérieur – Tome 3 : Trigonométrie & Géométrie

Prérequis essentiels (triangles)
Trigonométrie
Géométrie dans le plan
Géométrie dans l'espace

</td>
</tr>
<tr>
<td>


ISBN : 978-2-9593648-4-6
</td>
<td>
Bases mathématiques essentielles pour préparer l'entrée dans le supérieur – Tome 4 : Statistique & Probabilité

Statistique descriptive
Ajustement linéaire
Lois de probabilité

</td>
</tr>
</table>

Table des matières

Première partie

Prérequis essentiels

Deuxième partie

Calcul matriciel

Troisième partie

Fonctions polynômes

Quatrième partie

Fonctions rationnelles

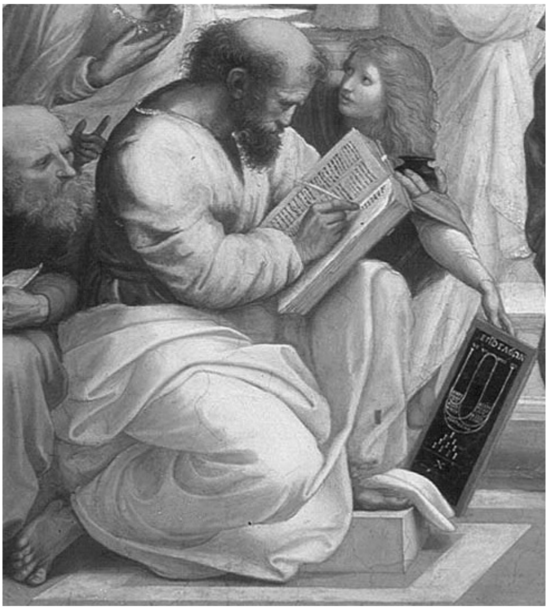
5

Cinquième partie

Nombres complexes

Première partie

Prérequis essentiels



Pythagore, philosophe et mathématicien grec du VIe siècle av. J.-C., est surtout connu pour son célèbre théorème portant sur les triangles rectangles. Ce théorème, qui stipule que dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés ($a^2 + b^2 = c^2$), est l'un des premiers ponts entre la géométrie et l'algèbre. Il permet d'aborder des concepts algébriques à travers des situations géométriques concrètes.

Cette relation entre la géométrie et l'algèbre est fondamentale. D'une part, le théorème de Pythagore peut être utilisé pour résoudre des équations du second degré, comme lorsqu'il s'agit de déterminer la longueur d'un côté d'un triangle en connaissant les deux autres. D'autre part, la formule algébrique dérivée de ce théorème illustre parfaitement comment des situations géométriques peuvent être traduites en équations mathématiques, un principe qui sous-tend une grande partie de l'algèbre moderne.

Le théorème de Pythagore ne se limite pas aux triangles ; il a aussi des implications dans de nombreux domaines mathématiques et scientifiques, comme la trigonométrie, l'analyse vectorielle et même la physique. De plus, il constitue une base pour l'exploration des nombres irrationnels, lorsque les longueurs des côtés du triangle ne sont pas des nombres entiers.

En somme, Pythagore a ouvert la voie à une approche unifiée des mathématiques, où la géométrie et l'algèbre interagissent étroitement pour résoudre des problèmes et modéliser des phénomènes du monde réel.

Pourquoi est-ce que ces prérequis sont essentiels ?

Les prérequis en algèbre, tels que définis ci-après, sont essentiels pour plusieurs raisons. Tout d'abord, la maîtrise de la résolution d'équations et d'inéquations constitue la base de nombreuses disciplines mathématiques. Comprendre comment isoler une variable ou identifier les solutions admissibles permet de résoudre des problèmes complexes dans divers domaines comme la physique ou l'économie.

La résolution d'équations du second degré est également cruciale. Elle introduit les concepts de discriminant et de racines, indispensables pour l'analyse de courbes et la modélisation de phénomènes réels. Sans cette compréhension, il est difficile d'aborder des sujets plus avancés, tels que les fonctions quadratiques ou les optimisations.

De plus, la factorisation d'un trinôme du second degré permet de simplifier les expressions et d'identifier les racines de manière plus intuitive. Cela facilite la résolution des équations et permet de mieux comprendre le comportement des fonctions polynomiales.

Quant à l'étude du signe d'un trinôme, elle est primordiale pour déterminer les intervalles de positivité et de négativité d'une fonction, ce qui est fondamental en analyse. Savoir distinguer les cas selon le discriminant aide à prédire le comportement de la fonction sans recourir systématiquement à un graphique.

Ainsi, ces prérequis forment un socle indispensable pour toute étude mathématique plus poussée, assurant une compréhension solide des concepts de base nécessaires à l'analyse et à la résolution de problèmes complexes.

Rappels de cours
Prérequis essentiels

1- Résolution d'une équation et d'une inéquation

1-1. Résolution d'une équation

Une équation est une égalité qui contient une inconnue x. Résoudre une équation, c'est trouver toutes les valeurs de x qui vérifient cette inégalité. Il s'agit d'une ou de plusieurs valeurs.

Exemple :
Résoudre l'équation suivante :

$$-5x + 3 = -4x + 1$$

Solution :

$$\begin{aligned} -5x + 3 &= -4x + 1 & \\ -5x + 4x &= 1 - 3 & \longleftarrow \text{On place l'inconnue « } x \text{ » à gauche et les « nombres » à droite.} \\ -x &= -2 & \longleftarrow \text{On réduit} \\ x &= 2 & \longleftarrow \text{On multiplie par } -1 \text{ à droite et à gauche.} \end{aligned}$$

Finalement la solution est : $x = 2$

1-2. Résolution d'une inéquation

Une inéquation est une inégalité qui contient une inconnue x. Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de x qui vérifient cette inégalité. Il s'agit d'un ensemble de valeurs.

Exemple 1 :
Résoudre l'inéquation suivante :

$$3x + 1 < 4 - 5x$$

Solution :

$$\begin{aligned} 3x + 1 &< 4 - 5x \\ 3x + 5x &< 4 - 1 \\ 8x &< 3 \\ x &< \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Les solutions sont tous les nombres réels strictement inférieurs à $\frac{3}{8}$. On écrit :

$$S = \left]-\infty\,;\,\frac{3}{8}\right[$$

Les coefficients $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ sont appelés coordonnées du vecteur $\vec{v}$ dans la base B.
On utilise la notation suivante :

$$\vec{v} = x_1.\vec{e_1} + x_2.\vec{e_2} + x_3.\vec{e_3} + \ldots\ldots + x_n.\vec{e_n} \Leftrightarrow \vec{v}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots\ldots \\ x_n \end{pmatrix}_B$$

Remarque
La base B est notée en indice afin d'indiquer qu'il s'agit des coordonnées du vecteur dans la base B.

2-4. Dimension d'un espace vectoriel

Une base d'un espace vectoriel E est une famille de vecteurs qui permettent de définir chaque vecteur de E d'une seule et unique façon.

Cette famille doit donc posséder suffisamment de vecteurs pour pouvoir définir tous les vecteurs de E. On dit que **la famille de vecteurs est génératrice**.

Un vecteur de la base ne doit pas pouvoir s'écrire comme une combinaison linéaire des seuls autres vecteurs de la base car s'il en était ainsi un vecteur quelconque de E posséderait alors plusieurs coordonnées différentes dans cette base. On dit que **la famille de vecteurs est libre**.

Une base d'un espace vectoriel E est **une famille de vecteurs à la fois libre et génératrice**. La dimension de E correspond au nombre de vecteurs constituant une base de E.

Exemples
La base canonique de IR^2 contient 2 vecteurs : IR^2 est de dimension 2.
La base canonique de IR^3 contient 3 vecteurs : IR^3 est de dimension 3.

2-5. Déterminant en dimension 2 ou 3

Si une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n constitue une base de E alors cette famille contient n vecteurs. Cependant la réciproque n'est pas toujours vraie : une famille de n vecteurs ne constitue pas forcément une base de E.
Si on dispose d'une base d'un espace vectoriel E de dimension 2 ou 3, le calcul du déterminant permet de déterminer si une famille de vecteurs donnée est également une base de E.

2-5.1 Cas de la dimension 2

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $B = \left(\vec{i}\,;\vec{j}\right)$. On considère deux vecteurs de E :

$$\vec{e_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}_B \quad \text{et} \quad \vec{e_2}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}_B$$

Le déterminant par rapport à la base B de la famille $(\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$ est le réel suivant :

$$det_B(\vec{e_1}\,;\vec{e_2}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1.y_2 - x_2.y_1$$

Théorème
La famille $(\overrightarrow{e_1}\,;\overrightarrow{e_2})$ est une base de l'espace vectoriel E si, et seulement si, son déterminant par rapport à la base B est non nul.

Remarque
Deux vecteurs colinéaires ne peuvent pas former une base. Si $\overrightarrow{e_1} = k.\overrightarrow{e_2}$ alors le déterminant est nul :

$$det_B(\overrightarrow{e_1}\,;\overrightarrow{e_2}) = \begin{vmatrix} k.x_2 & x_2 \\ k.y_2 & y_2 \end{vmatrix} = k.x_2.y_2 - x_2.k.y_2 = 0$$

2-5.2 Cas de la dimension 3

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $B = \left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$. On considère trois vecteurs de E :

$$\overrightarrow{e_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}_B,\ \overrightarrow{e_2}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}_B \text{ et } \overrightarrow{e_3}\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}_B$$

Le déterminant par rapport à la base B de la famille $(\overrightarrow{e_1}\,;\overrightarrow{e_2}\,;\overrightarrow{e_3})$ est le réel suivant :

$$det_B(\overrightarrow{e_1}\,;\overrightarrow{e_2}\,;\overrightarrow{e_3}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1.\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - y_1.\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} + z_1.\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Théorème
La famille $(\overrightarrow{e_1}\,;\overrightarrow{e_2}\,;\overrightarrow{e_3})$ est une base de l'espace vectoriel E si, et seulement si, son déterminant par rapport à la base B est non nul.

3- Application linéaire

3-1. Définition d'une application linéaire

Soit f une application de E dans F où E et F sont deux espaces vectoriels sur IR. L'application f est une application linéaire (ou morphisme de IR–espaces vectoriels) si, et seulement si, la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall(x\,;y) \in E^2, \forall(\lambda\,;\mu) \in \mathrm{IR}^2, f(\lambda.x + \mu.y) = \lambda.f(x) + \mu.f(y)$$

Un endomorphisme est un morphisme ayant même espace vectoriel de départ et d'arrivée, E. Dans ce cas f est appelée endomorphisme de l'espace vectoriel E.

Exemple

Soit f l'homothétie vectorielle de rapport 5. Pour tout vecteur $\vec{u}$, l'image de $\vec{u}$ par f est égale à :

$$f(\vec{u}) = 5\,\vec{u}$$

f est une application linéaire. En effet, $\forall\ (u\,;v) \in E^2, \forall\ (\lambda\,;\mu) \in \mathrm{IR}^2$:

$$f(\lambda.\vec{u} + \mu.\vec{v}) = 5.(\lambda.\vec{u} + \mu.\vec{v}) = \lambda.(5\,\vec{u}) + \mu.(5\,\vec{v}) = \lambda.f(\vec{u}) + \mu.f(\vec{v})$$

Finalement :

$$f(\lambda.\vec{u} + \mu.\vec{v}) = \lambda.f(\vec{u}) + \mu.f(\vec{v})$$

f est donc une application linéaire.

3-2. Noyau d'une application linéaire

Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E. On appelle noyau de l'endomorphisme f, noté $Kerf$, l'ensemble contenant tous les vecteurs $\vec{u}$ de E tels que $f(\vec{u}) = \vec{0}$:

$$Kerf = \left\{\ \vec{u} \in E\ /\ f(\vec{u}) = \vec{0}\ \right\}$$

4- Matrice d'une application linéaire

4-1. Définition

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $B = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2}\,;\vec{e_3}\,;\ldots\ldots\ldots;\vec{e_n})$, et f un endomorphisme de E défini par les images $f(\vec{e_j})$ des vecteurs de B, où j est un entier compris entre 1 et n. Il s'agit de calculer l'image $f(\vec{v})$ d'un vecteur $\vec{v}$ par l'endomorphisme f. Pour cela on commence par déterminer la matrice $A_{f,B}$ représentant l'endomorphisme f par rapport à la base B. L'image de n'importe quel vecteur est déterminée à l'aide d'un produit matriciel.

Définition

On appelle matrice de f par rapport à la base B le tableau noté entre parenthèses et contenant, en colonnes, les coordonnées des images $f(\vec{e_j})$ des vecteurs de B :

$$A_{f,B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On dit que $A_{f,B}$ est une matrice carrée d'ordre n (n est la dimension de l'espace vectoriel E).

Exercices pour s'entraîner

Exercice 1

Dans un espace vectoriel E muni d'une base $B = \left(\vec{i}\ ;\vec{j}\ ;\vec{k}\right)$, on considère les trois vecteurs suivants :

$$\vec{e_1}\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}_B,\ \vec{e_2}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}_B \text{ et } \vec{e_3}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}_B$$

1/ Quelle est la dimension de E ?
2/ La famille $(\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$ forme-t-elle une base de E ?
3/ Montrer que la famille $B' = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2}\,;\vec{e_3})$ forme une base de E.
4/ Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\6\\4\end{pmatrix}_B$ par rapport à la base B'.
5/ Quelles sont les coordonnées de $\vec{e_3}$ par rapport à la base B' ?
6/ Quelles sont les coordonnées de $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}_{B\prime}$ par rapport à la base B ?

Solution

1/ L'espace vectoriel E est muni d'une base comportant 3 vecteurs. L'espace vectoriel E est donc de dimension 3.

2/ L'espace vectoriel E est de dimension 3. On ne peut donc pas former une base avec seulement 2 vecteurs. La famille $(\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$ ne forme pas une base de E.

3/ La famille $B' = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2}\,;\vec{e_3})$ forme une base de E si les trois vecteurs de B' sont libres. On calcule le déterminant suivant :

$$det(\vec{e_1}\,;\vec{e_2}\,;\vec{e_3}) = \begin{vmatrix}4 & 1 & -3\\3 & 2 & 1\\1 & 1 & 1\end{vmatrix} = 4(1) - 3(4) + 1(7) = -1 \neq 0$$

On en déduit que la famille $B' = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2}\,;\vec{e_3})$ forme une base de E.

4/ On écrit l'équivalence suivante :

$$\vec{v} = a\,\vec{e_1} + b\,\vec{e_2} + c\,\vec{e_3} \Leftrightarrow \begin{cases}4a + b - 3c = -3\\3a + 2b + c = 6\\a + b + c = 4\end{cases}$$

On obtient une unique solution : $a = -1$, $b = 4$ et $c = 1$.

On en déduit l'écriture suivante :

$$\vec{v} = -\vec{e_1} + 4\,\vec{e_2} + \vec{e_3} \Leftrightarrow \vec{v}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}_{B'}$$

5/ Le vecteur $\vec{e_3}$ est un vecteur de la base B', on en déduit ses coordonnées :

$$\vec{e_3}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_{B'}$$

6/ On a l'égalité suivante : $\vec{w} = \vec{e_1} + 2\,\vec{e_2} + \vec{e_3}$ et on dispose des coordonnées suivantes :

$$\vec{e_1}\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}_B, \vec{e_2}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}_B \text{ et } \vec{e_3}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}_B$$

On en déduit les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ par rapport à B : $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\8\\4\end{pmatrix}_B$

Exercice 2

Dans un espace vectoriel E muni d'une base $B = \left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$, on considère les vecteurs suivants :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}_B, \vec{v}\begin{pmatrix}-2\\5\\-3\end{pmatrix}_B, \vec{w}\begin{pmatrix}3\\-6\\2\end{pmatrix}_B \text{ et } \vec{t}\begin{pmatrix}-5\\11\\-5\end{pmatrix}_B$$

1/ Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ appartiennent-ils au même plan vectoriel ?
2/ Le vecteur $\vec{t}$ appartient-il au plan vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$?

Solution

1/ Un plan vectoriel est de dimension 2. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ appartiennent au même plan vectoriel si la famille $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}\right)$ n'est pas libre. On calcule le déterminant suivant :

$$det\left(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}\right) = \begin{vmatrix}4 & -2 & 3\\3 & 5 & -6\\2 & -3 & 2\end{vmatrix} = 4(-8) - 3(5) + 2(-3) = -53$$

$$det\left(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}\right) \neq 0$$

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ n'appartiennent pas au même plan vectoriel.

Remarque
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base de l'espace vectoriel E.

Rappels de cours
Fonctions polynômes

1- Définitions

- **Définition d'un polynôme**

On appelle fonction polynomiale ou polynôme à coefficients réels toute fonction P définie sur IR par :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x \quad + a_0$$

Les coefficients réels $a_n, a_{n-1}, \ldots\ldots, a_2, a_1, a_0$ sont les coefficients du polynôme P.

- **Degré d'un polynôme**

Si a_n est non nul, l'entier naturel n est le degré de P, on note $\deg(P) = n$.

- **Racines d'un polynôme**

Les valeurs de x, réelles ou complexes, pour lesquelles $P(x) = 0$ sont appelées les racines, ou les zéros, du polynôme P.

2- Factorisation d'un polynôme

2-1. Factorisation dans le cas de racines réelles

2-1.1 Théorème de factorisation

Si le nombre réel r est une racine du polynôme P de degré n alors le polynôme peut être factorisé par $(x - r)$:

$$P(x) = (x - r) \cdot Q(x) \quad \text{avec } \deg(Q) = n - 1$$

2-1.2 Ordre de multiplicité

Soit r une racine réelle d'un polynôme P de degré n et α un nombre entier strictement positif et inférieur à n.

Si $P(x)$ peut être factorisé par $(x - r)^\alpha$ mais pas par $(x - r)^{\alpha+1}$, on dit que r est une racine d'ordre de multiplicité égal à α.

- **Exemple**

On souhaite déterminer l'ordre de multiplicité des racines du polynôme suivant : $P(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$.

On remarque que $r = 1$ est une racine de P.

On effectue la division euclidienne de $P(x)$ par $(x - 1)$:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3+x^2-5x+3 & x-1 \\
\cline{2-2}
\underline{-(x^3-x^2)} & x^2+2x-3 \\
\quad 2x^2-5x+3 & \\
\quad \underline{-(2x^2-2x)} & \\
\quad -3x+3 & \\
\quad \underline{-\left(-3x+3\right)} & \\
\qquad 0 &
\end{array}
$$

On en déduit que $P(x)=(x-1)(x^2+2x-3)$. Les racines du polynôme x^2+2x-3 sont $r_1=1$ et $r_2=-3$. On en déduit la factorisation de P :

$$P(x)=(x-1)(x-1)(x+3)=(x-1)^2(x+3)$$

$r_1=1$ est une racine d'ordre de multiplicité égal à 2.
$r_2=-3$ est une racine d'ordre de multiplicité égal à 1.

2-2. Factorisation dans le cas de racines complexes

2-2.1 Conjugué d'une racine complexe

Si le nombre complexe z est une racine du polynôme P de degré n alors le nombre complexe conjugué $\overline{z}$ est également une racine de P.

2-2.2 Théorème de factorisation

Si le nombre complexe z est une racine du polynôme P de degré n alors :

$$P(x)=(x^2+bx+c)\cdot Q(x) \quad \text{avec} \begin{cases} b=-2\times\Re e(z) \\ c=|z|^2 \\ \deg(Q)=n-2 \end{cases} \; ; \; b\in \mathrm{IR} \text{ et } c\in\mathrm{IR}$$

En effet, si les complexes z et $\overline{z}$ sont racines du polynôme P, on peut donc factoriser $P(x)$ par $(x-z)(x-\overline{z})$.
En développant, on obtient :

$$(x-z)(x-\overline{z})=x^2-(z+\overline{z})x+z\cdot\overline{z}=x^2-2\times\Re e(z)\cdot x+|z|^2$$

Par identification, on trouve le résultat suivant :

$$\begin{cases} b=-2\times\Re e(z) \\ c=|z|^2 \\ \deg(Q)=n-2 \end{cases}$$

Exercices pour s'entraîner

Exercice 1

Pour chacune des questions suivantes, on donne un polynôme P ainsi qu'une ou plusieurs racines. Factoriser le polynôme P sous la forme d'un produit de polynômes irréductibles.

1/ $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ et $P(-1) = 0$.

2/ $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ et $P(1) = 0$.

3/ $P(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 4$ et $P(2) = 0$.

4/ $P(x) = x^3 + 4x^2 - 8$ et $P(-2) = 0$.

5/ $P(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 13x + 6$ et $P(2) = 0$, $P(-3) = 0$.

Solution

1/ $P'(-1) \neq 0$; la racine $r_1 = -1$ est d'ordre de multiplicité égal à 1.
On effectue la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $(x+1)$:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + x^2 + x + 1 & x+1 \\
-(x^3 + x^2) & \\
\cline{1-2}
\quad x + 1 & x^2 + 1 \\
\ -(x+1) & \\
\cline{1-1}
\quad 0 &
\end{array}
$$

On obtient :

$$P(x) = (x+1)(x^2+1)$$

2/ On calcule les valeurs suivantes :

$P'(x) = 3x^2 + 2x - 1$; $P'(1) \neq 0$.
$P^{(2)}(x) = 6x + 2$; $P^{(2)}(1) \neq 0$.

La racine $r_1 = 1$ est d'ordre de multiplicité égal à 1. On remarque que $r_2 = -1$ est une racine évidente de P. $P'(-1) = 0$ et $P^{(2)}(-1) \neq 0$.
La racine $r_2 = -1$ est d'ordre de multiplicité égal à 2.

Finalement :

$$P(x)=(x+1)^2(x-1)$$

3/ On calcule les valeurs suivantes :

$P'(x)=6x^2+2x-8$; $P'(2)\neq 0$. La racine $r_1=2$ est d'ordre de multiplicité égal à 1.

On effectue la division euclidienne suivante :

$$\begin{array}{l|l}
2x^3+x^2-8x-4 & x-2 \\
-(2x^3-4x^2) & \\ \hline
5x^2-8x-4 & 2x^2+5x+2 \\
-(5x^2-10x) & \\ \hline
2x-4 & \\
-(2x-4) & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

On obtient :

$$P(x)=(2x^2+5x+2)(x-2)$$

Le polynôme $2x^2+5x+2$ possède deux racines $r_2=-2$ et $r_3=-\dfrac{1}{2}$.

Finalement :

$$P(x)=2(x-2)(x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(x-2)(x+2)(2x+1)$$

4/ On calcule les valeurs suivantes :

$P'(x)=3x^2+8x$; $P'(-2)\neq 0$. La racine $r_1=-2$ est d'ordre de multiplicité égal à 1.

On effectue la division euclidienne suivante :

$$\begin{array}{l|l}
x^3+4x^2-8 & x+2 \\
-(x^3+2x^2) & \\ \hline
2x^2-8 & x^2+2x-4 \\
-(2x^2+4x) & \\ \hline
-4x-8 & \\
-(-4x-8) & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

Rappels de cours
Fonctions rationnelles

Il s'agit d'exposer les méthodes de décomposition d'une fonction rationnelle sous la forme d'une somme de fonctions rationnelles plus simples (appelées également fractions rationnelles). Ces méthodes sont indispensables pour le calcul de certaines intégrales.

1- Définitions

- **Définition d'une fonction rationnelle**

On appelle fonction rationnelle réelle F toute fonction s'écrivant comme le quotient de deux fonctions polynomiales réelles N et D :

$$F(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + a_{p-2}x^{p-2} + ... + a_1 x + a_0}{b_q x^q + b_{q-1}x^{q-1} + b_{q-2}x^{q-2} + ... + b_1 x + b_0} \quad \text{où } b_q \neq 0$$

- **Fonction rationnelle irréductible**

La fonction rationnelle réelle F est irréductible si les polynômes N et D n'ont pas de racines communes, c'est-à-dire pas de facteurs communs.

- **Remarque**

Il ne faut pas confondre l'irréductibilité d'un polynôme et d'une fonction rationnelle.

- **Exemple**

Soit la fonction rationnelle réelle F définie par : $F(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$

$N(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ et $D(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

La fonction rationnelle réelle F n'est donc pas irréductible car $r = 1$ est une racine commune à N et à D.
Il est possible de simplifier cette fraction :

$$F(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-2)} = \frac{x-1}{x-2}$$

$Q(x) = \frac{x-1}{x-2}$ est une fonction rationnelle irréductible.

- **Racines et pôle d'une fonction rationnelle**

➔ Les valeurs de x, réelles ou complexes, pour lesquelles $N(x)=0$ sont appelées les racines, ou les zéros, de la fonction rationnelle F.

➔ Les valeurs de x, réelles ou complexes, pour lesquelles $D(x)=0$ sont appelées les pôles de la fonction rationnelle F.

- **Ordre de multiplicité d'un pôle**

Soit F une fonction rationnelle irréductible : $F(x)=\dfrac{N(x)}{D(x)}$

On dit que a, réel ou complexe, est un pôle de F d'ordre de multiplicité α si a est une racine, ou un zéro, de D d'ordre de multiplicité égal à α.

- **Exemple**

On souhaite déterminer l'ordre de multiplicité des pôles de la fonction rationnelle suivante :

$$F(x)=\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{x^3-3x+1}{x^3+x^2-5x+3}$$

On a déjà montré que : $D(x)=(x-1)^2(x+3)$. On remarque que $N(1)\neq 0$ et $N(-3)\neq 0$. Ainsi N et D n'ont pas de racines communes. F est donc irréductible.
$r_1=1$ est un pôle de F d'ordre 2 et $r_2=-3$ est un pôle de F d'ordre 1.

2- Décomposition en éléments simples

On étudie la décomposition en éléments simples dans l'ensemble IR.

2-1. Partie entière d'une fonction rationnelle

Soit $F=\dfrac{N}{D}$ une fonction rationnelle réelle irréductible avec N et D des fonctions polynomiales de degrés respectifs p et q.
On appelle partie entière de F le quotient $E(x)$ de la division euclidienne de $N(x)$ par $D(x)$. On obtient l'égalité suivante :

$$F(x)=\frac{N(x)}{D(x)}=E(x)+\frac{R(x)}{D(x)}$$

Si $p<q$ alors la fonction rationnelle F a une partie entière nulle.

Exercices pour s'entraîner

Exercice 1

Soit f la fonction rationnelle définie sur $I =]1;+\infty[$:

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$$

1/ Décomposer la fonction rationnelle f en éléments simples.

2/ En déduire une primitive F de la fonction f sur l'ensemble I .

3/ Calculer $J = \int_2^4 f(t)dt$.

Solution

1/ f est la fonction rationnelle suivante :

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$$

On décompose la fonction f :

$$f(x) = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+2)}$$

On choisit deux équations afin de déterminer les inconnues :

$$\begin{cases} f(0) = -\dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x.f(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -A + \dfrac{B}{2} = -\dfrac{1}{2} \\ A + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{3} \\ B = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

On en déduit l'expression de la fonction f :

$$f(x) = \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3(x+2)}$$

2/ On détermine une primitive F de la fonction f sur l'ensemble I :

$$F(x) = \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{3}\ln(x+2)$$

3/ On calcule l'intégrale J :

$$J = \int_2^4 f(t)dt = F(4) - F(2) = \frac{\ln 2}{3}$$

Exercice 2

Soit f la fonction rationnelle définie sur $I =]3;+\infty[$:

$$f(x) = \frac{3x-1}{(x-3)(x+1)}$$

1/ Décomposer la fonction rationnelle f en éléments simples.

2/ En déduire une primitive F de la fonction f sur l'ensemble I .

3/ Calculer $J = \int_4^8 f(t)dt$.

Solution

1/ f est la fonction rationnelle suivante :

$$f(x) = \frac{3x-1}{(x-3)(x+1)}$$

On décompose la fonction f :

$$f(x) = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+1)}$$

On choisit deux équations afin de déterminer les inconnues :

$$\begin{cases} f(0) = \frac{1}{3} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x.f(x) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3}A + B = \frac{1}{3} \\ A + B = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \end{cases}$$

Rappels de cours
Nombres complexes

1- Forme algébrique d'un nombre complexe

1-1. Définition

On appelle corps des nombres complexes et on note $\mathbb{C}$ un ensemble contenant le corps des réels IR tel que :

- Il existe dans $\mathbb{C}$ un élément noté i tel que $i^2 = -1$;
- Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $z = a + ib$, où a et b sont des réels ;
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent l'addition et la multiplication dans IR et qui suivent les mêmes règles de calcul.

➔ **Remarque**

En électricité le nombre i est noté j afin de ne pas le confondre avec la notation du courant dans un circuit. En mathématiques, la notation j est traditionnellement réservée pour désigner l'une des racines cubiques de l'unité.

1-2. Représentation graphique

Le complexe $z = a + ib$ est appelé l'affixe du point M . Dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$, tout point M du plan d'affixe $z = a + ib$ peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes : $M(a;b)$. On a les définitions suivantes :

- **Partie réelle**

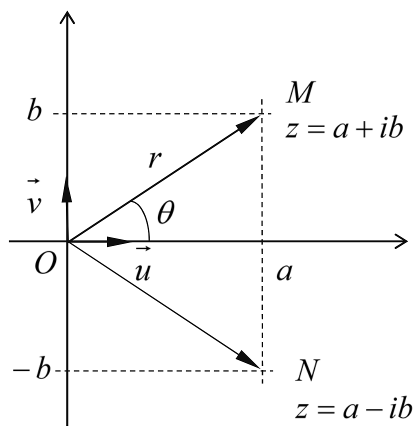
$a = \Re e(z)$ est la partie réelle de z , elle caractérise l'abscisse du point M .

- **Partie imaginaire**

$b = \Im m(z)$ est la partie imaginaire de z , elle caractérise l'ordonnée du point M .

- **Module**

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ est le module de z , il caractérise la distance OM .



- **Argument**

$\theta = \arg(z)$ est l'argument de z , il caractérise une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)$.

$\bar{z} = a - ib$ est le complexe conjugué de z . Il correspond à l'affixe du point N , symétrique du point M par rapport à l'axe $\left(O,\vec{u}\right)$.

1-3. Propriétés

Tableau récapitulatif des propriétés relatives au module, à l'argument et au conjugué d'un complexe $z = a + ib$ non nul :

Module	Argument	Conjugué
$\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert \times \lvert z'\rvert$	$\arg(zz') = \arg z + \arg z' \quad [2\pi]$	$\Re e(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2} = a$
$\left\lvert \dfrac{1}{z} \right\rvert = \dfrac{1}{\lvert z\rvert}$	$\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg z \quad [2\pi]$	$\Im m(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i} = b$
$\left\lvert \dfrac{z'}{z} \right\rvert = \dfrac{\lvert z'\rvert}{\lvert z\rvert}$	$\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) = \arg z' - \arg z \quad [2\pi]$	$z \cdot \overline{z} = \lvert z\rvert^2 = r^2$
$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n \quad n \in \mathrm{IN}$	$\arg(z^n) = n \cdot \arg z \quad [2\pi] \quad n \in \mathrm{IN}$	$\lvert\overline{z}\rvert = \lvert z\rvert \quad ; \quad \overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$
		$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
		$\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$
		$\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$

- **Remarques**

(1) Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B. Le complexe $z_B - z_A$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$. On a les égalités suivantes :

$$AB = \lvert z_B - z_A\rvert \text{ et } \left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(z_B - z_A) \quad [2\pi]$$

(2) Soit les points M_1 d'affixe z_1, M_2 d'affixe z_2 et M d'affixe z. On a alors :

$$\left(\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2}\right) = \arg\left(\frac{z_2 - z}{z_1 - z}\right) \quad [2\pi]$$

(6) $\dfrac{z}{i-1}-i=\dfrac{z}{1+i}+i$

$$\frac{z}{i-1}-i=\frac{z}{1+i}+i \Leftrightarrow z\left(\frac{1}{i-1}-\frac{1}{1+i}\right)=2i \Leftrightarrow z=\frac{2i}{\left(\frac{1}{i-1}-\frac{1}{1+i}\right)}=-2i$$

On obtient :

$$z=-2i$$

Exercice 4

Résoudre les équations suivantes dans l'ensemble des nombres complexes :

(1) $z=2\overline{z}$; (2) $\overline{z}=iz$; (3) $z.\overline{z}=z+2$; (4) $\overline{z}-1=z.\overline{z}-i$

Solution

(1) $z=2\overline{z}$

On pose $z=x+iy$ avec $x,y\in \mathrm{IR}$.

$$z=2\overline{z} \Leftrightarrow x+iy=2(x-iy) \Leftrightarrow \begin{cases} x=2x \\ y=-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

On obtient :

$$z=0$$

(2) $\overline{z}=iz$

On pose $z=x+iy$ avec $x,y\in \mathrm{IR}$.

$$\overline{z}=iz \Leftrightarrow x-iy=i(x+iy) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ -y=x \end{cases} \Leftrightarrow y=-x$$

On obtient les solutions suivantes :

$$z=k(1-i) \text{ avec } k\in \mathrm{IR}.$$

(3) $z.\overline{z}=z+2$

On pose $z=x+iy$ avec $x,y\in \mathrm{IR}$.

$$z.\overline{z}=z+2 \Leftrightarrow (x+iy)(x-iy)=x+iy+2 \Leftrightarrow x^2+y^2=x+iy+2$$

$$z.\overline{z} = z + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = x + 2 \\ 0 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

On obtient les solutions suivantes :

$$z_1 = -1 \text{ ou } z_2 = 2$$

(4) $\overline{z} - 1 = z.\overline{z} - i$

On pose $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathrm{IR}$.

$$\overline{z} - 1 = z.\overline{z} - i \Leftrightarrow x - iy - 1 = x^2 + y^2 - i \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = x^2 + y^2 \\ -y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 2 = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Il n'y a aucune solution.

Exercice 5

Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $z^2 - \overline{z}$ soit réel.

Solution

On pose $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathrm{IR}$.

$$z^2 - \overline{z} = (x + iy)^2 - (x - iy) = x^2 - y^2 + 2ixy - x + iy$$

$$z^2 - \overline{z} = x^2 - y^2 - x + iy(1 + 2x)$$

On en déduit l'équivalence suivante :

$$z^2 - \overline{z} \in \mathrm{IR} \Leftrightarrow y(1 + 2x) = 0$$

On obtient :

$$y = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

On obtient les solutions suivantes :

$$z_1 = -\frac{1}{2} + ik_1 \text{ avec } k_1 \in \mathrm{IR} \text{ ou } z_2 = k_2 \text{ avec } k_2 \in \mathrm{IR}.$$

Cet ouvrage a été achevé en octobre 2024
Dépôt légal : octobre 2024
Déposé auprès de la BnF (Bibliothèque Nationale de France)