Corrigé du baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2004

EXERCICE 1 **7 points**

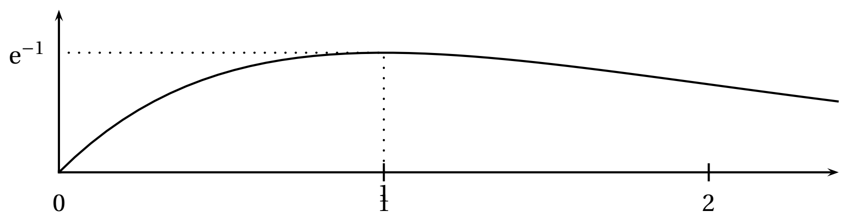
Partie A

1. **a.** Pour tout x, $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x}}$. Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x}} = 0$.
   Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   b. La fonction f produit de deux fonctions dérivables est dérivable. Pour tout x, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$.
   Comme pour tout x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$. Soit sur $[0\ ,\ +\infty[$: $f'(x) \geqslant 0$ sur $[0\ ,\ 1]$; $f'(x) \leqslant 0$ sur $[1\ ,\ +\infty]$.
   Donc f est croissante sur l'intervalle $[0\ ,\ 1]$, décroissante sur l'intervalle $[1\ ,\ +\infty[$.
   D'où le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	1	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

   c. Représentation graphique de f (échelle $\frac{1}{2}$) :



2. **a.** La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ,\ 1]$; $f(0) = 0$ et $f(1) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$; donc pour $m \in \left]0\ ,\ \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right[$ l'équation $f(x) = m$ admet une seule solution sur l'intervalle $]0\ ,\ 1[$.
   La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[1\ ,\ +\infty[$; $f(1) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f = 0$; donc pour $m \in \left]0\ ,\ \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right[$ l'équation $f(x) = m$ admet une seule solution sur $]1\ ,\ +\infty[$.
   En résumé, pour tout m de $\left]0\ ,\ \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right[$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions. Résultat attendu graphiquement : les solutions de cette équation sont les abscisses des points d'intersection de la courbe Γ et de la droite d'équation $y = m$. Or si $m \in \left]0\ ,\ \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right[$, cette droite coupe bien la courbe en deux points distincts.

   b. Pour $m = \dfrac{1}{4}$, la solution α est celle qui appartient à l'intervalle $]0\ ,\ 1[$. On trouve facilement que $\alpha \approx 0{,}357$ soit $\alpha \in]0{,}35\ ,\ 0{,}36[$.

c. De façon immédiate, pour $m = 0$ l'équation $f(x) = 0$ admet pour unique solution $x = 0$, et pour $m = \dfrac{1}{\text{e}}$ cette équation admet pour unique solution $x = 1$.

Partie B

1. **a.** Par hypothèse $u_0 > 0$.
p étant un entier naturel quelconque, si $u_p > 0$ alors u_{p+1}, produit de u_p par le réel strictement positif e^{-p}, est strictement positif.
En conclusion pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

b. Comme pour tout entier n, $u_n > 0$, comparons $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \text{e}^{-u_n}$, $-u_n < 0$ donc $\text{e}^{-u_n} < 1$, soit $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$: la suite (u_n) est donc décroissante.

c. Il résulte des questions précédentes que la suite (u_n), décroissante et minorée (par 0), est convergente. Soit ℓ sa limite.
ℓ est donc solution de l'équation $\ell = \ell\text{e}^{-\ell}$, soit $\ell\left(1 - \text{e}^{-\ell}\right) = 0$. Les deux facteurs s'annulant pour la seule valeur 0, on en déduit que $\ell = 0$.
En résumé $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. **a.** $w_n - w_{n+1} = \ln u_n - \ln u_{n+1} = \ln$
$dfracu_n u_{n+1} = -\ln \text{e}^{-u_n} = \ln \text{e}^{u_n} = u_n$.

b. Il résulte de **a.** que $S_n = w_0 - w_1 + w_1 - w_2 + \cdots + w_{n-1} - w_n + w_n - w_{n+1}$.
Soit après simplification de proche en proche, $S_n = w_0 - w_{n+1}$.

c. Sachant, d'après **B.1.c.**, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$, et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

2. Par définition $u_1 = u_0\text{e}^{-u_0}$ donc $u_1 \in \left]0\,,\,\dfrac{1}{\text{e}}\right[$.
Or d'après **A. 2. a.**, on sait qu'il existe une deuxième valeur, β, telle que $\beta\text{e}^{-\beta} = u_1$. On a donc $v_0 = \beta$ puis $v_1 = u_1$ et, plus généralement, pour tout ne1, $u_n = v_n$.

Exercice 2

1. La solution générale de l'équation $y' + y = 0$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto k\text{e}^{-x}$, où k est une constante réelle arbitraire.
L'image de 0 est e donc $k\text{e}^0 = \text{e}$ soit $k = \text{e}$.
La fonction f cherchée est donc celle définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \text{e} \times \text{e}^{-x}$. Soit $f(x) = \text{e}^{1-x}$.

2. $\text{e}^{1-x} = t \iff 1 - x = \ln t$. La solution de cette équation est donc le réel $1 - \ln t$.

3. Soit u et v les fonctions définies sur $[1\,,\,e]$ respectivement par $u(t) = (1 - \ln t)^2$ et $v(t) = t$. Ces deux fonctions sont dérivables et leurs dérivées u' et v', définies respectivement par $u'(t) = -\dfrac{2}{t}(1 - \ln t)$ et $v'(t) = 1$, continues sur l'intervalle $[1\,,\,e]$. Le théorème d'intégration par parties s'applique donc et :
$\text{V} = \pi\left(\left[t(1 - \ln t)^2\right]_1^e + 2\displaystyle\int_1^{\text{e}} (1 - \ln t)\,\text{d}t\right)$.
Calculons à nouveau par parties $\displaystyle\int_1^{\text{e}} (1 - \ln t)\,\text{d}t$.
Posons $u(t) = 1 - \ln t$ et $v(t) = t$. Ces deux fonctions sont dérivables sur $[1\,,\,e]$, de dérivées respectives u' et v', continues sur $[1\,;\,\text{e}]$, définies par $u'(t) = -\dfrac{1}{t}$ et $v'(t) = 1$.
D'où : $\displaystyle\int_1^{\text{e}} (1 - \ln t)\,\text{d}t = \left[t(1 - \ln t)\right]_1^{\text{e}} + \int_1^{\text{e}} \text{d}t = -1 + \text{e} - 1 = \text{e} - 2$.
En reportant dans l'expression de V, on obtient :

$V = \pi(-1 + 2(e - 2)) = \pi(2e - 5)$.

Exercice 3

1. L'urne contient 6 boules et on en tire 2 : le nombre de cas possibles est donc C_6^2.
• Pour réaliser l'évènement A_0 il faut tirer 2 boules rouges parmi 4 : le nombre de cas favorables est donc C_4^2.
On en déduit que $p(A_0) = \dfrac{C_4^2}{C_6^2}$. Soit $p(A_0) = \dfrac{2}{5}$.
• Pour réaliser l'évènement A_1 il faut tirer 1 boule rouge parmi 4 et une boule noire parmi 2 : le nombre de cas favorables est donc 4×2.
On en déduit que $p(A_1) = \dfrac{4 \times 2}{C_6^2}$. Soit $p(A_1) = \dfrac{8}{15}$.
• Pour réaliser l'évènement A_2 il faut tirer 2 boules noires parmi 2 : le nombre de cas favorables est donc 1.
On en déduit que $p(A_2) = \dfrac{1}{C_6^2}$. Soit $p(A_2) = \dfrac{1}{15}$.

2. **a.** Il reste 4 boules dans l'urne et on en tire 2 : le nombre de cas possibles est donc C_4^2.
• A_0 étant réalisé, il reste dans l'urne 2 boules rouges et 2 boules noires. Pour réaliser B_0 il suffit de tirer 2 boules rouges : il y a donc un cas favorable.
La probabilité $p_{A_0}(B_0) = \dfrac{1}{C_4^2} = \dfrac{1}{6}$.
• A_1 étant réalisé, il reste dans l'urne 3 boules rouges et 1 boule noire. Pour réaliser B_0 il suffit de tirer 2 boules rouges : il y a donc C_3^2 cas favorables.
La probabilité $p_{A_1}(B_0) = \dfrac{C_3^2}{C_4^2} = \dfrac{1}{2}$.
• A_2 étant réalisé, il reste dans l'urne 4 boules rouges. L'événement B_0 est donc certain. Donc $p_{A_1}(B_0) = 1$.

b. L'évènement B_0 est la réunion des évènements incompatibles $A_0 \cap B_0$, $A_1 \cap B_0$ et $A_2 \cap B_0$. Par suite $p(B_0)$ est la somme des probabilités de ces trois évènements.
Or $p(A_0 \cap B_0) = p_{A_0}(B_0) \times p(A_0) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{15}$.
$p(A_1 \cap B_0) = p_{A_1}(B_0) \times p(A_1) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{8}{15} = \dfrac{4}{15}$.
$p(A_2 \cap B_0) = p_{A_2}(B_0) \times p(A_2) = \dfrac{1}{15}$.
D'où $p(B_0) = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$.

c. Des calculs analogues à ceux menés en **a.** et **b.** ci-dessus conduisent à calculer :
$p_{A_0}(B_1) = \dfrac{2 \times 2}{C_4^2} = \dfrac{2}{3}$. D'où $p(A_0 \cap B_1) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{15}$.
$p_{A_1}(B_1) = \dfrac{1 \times 3}{C_4^2} = \dfrac{1}{2}$. D'où $p(A_1 \cap B_1) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{8}{15} = \dfrac{4}{15}$.
Extraire une boule noire au deuxième tirage quand les deux boules noires ont été extraites lors du premier tirage est impossible. Donc $p_{A_2}(B_1) = 0$.
D'où la valeur de $p(B_1)$, somme des trois probbilités précédentes : $p(B_1) = \dfrac{8}{15}$. $p_{A_0}(B_2) = \dfrac{1}{C_4^2} = \dfrac{1}{6}$. D'où $p(A_0 \cap B_2) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{15}$.

Comme ci-dessus : $p_{A_1}(B_2) = 0$ et $p_{A_2}(B_2) = 0$.
D'où la valeur de $p(B_2)$, somme des trois probbilités précédentes : $p(B_2) = \dfrac{1}{15}$.

d. On cherche à calculer $p_{B_1}(A_1)$. Or d'après les calculs antérieurs $p(A_1 \cap B_1) = \dfrac{4}{15}$ et $p(B_1) = \dfrac{8}{15}$. Donc $p_{B_1}(A_1) = \dfrac{1}{2}$.

3. L'évènement R est réalisé lorsque l'un des évènements incompatibles ci-dessous l'est :
« tirer une boule noire au premier tirage et une boule noire au second » soit réaliser l'évènement $A_1 \cap B_1$;
ou
« ne tirer aucune boule noire au premier tirage et deux boules noires au second » soit réaliser l'évènement $A_0 \cap B_2$.
Il en résulte que $p(R) = p(A_1 \cap B_1) + p(A_0 \cap B_2) = \dfrac{4}{15} + \dfrac{1}{15} = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 4

Partie A

1. Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ ont respectivement pour cordonnées $(5,5)$, $(1,3)$ et $(8,-4)$.
Les vecteurs $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ et $\overrightarrow{PC}$ ont respectivement pour cordonnées $(-5,5)$, $(-9,3)$ et $(-2,-4)$.
Par suite $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{PA} = 0$ donc $A \in \Gamma$; $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{PB} = 0$ donc $B \in \Gamma$; $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{PC} = 0$ donc $C \in \Gamma$.

2. Montrons que $D \in (BC)$ en établissant que les vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
$\overrightarrow{DB}$ a pour coordonnées $(-1,1)$, $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(7,-7)$, donc $\overrightarrow{BC} = (-7)\overrightarrow{DB}$.
Montrons que $(OD) \perp (BC)$ en établissant que $\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{BC} = 0$.
$\overrightarrow{OD}$ a pour coordonnées $(2,2)$, $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(7,-7)$, donc $\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{BC} = 0$.
En résumé, D est bien le projeté de O sur la droite (BC).

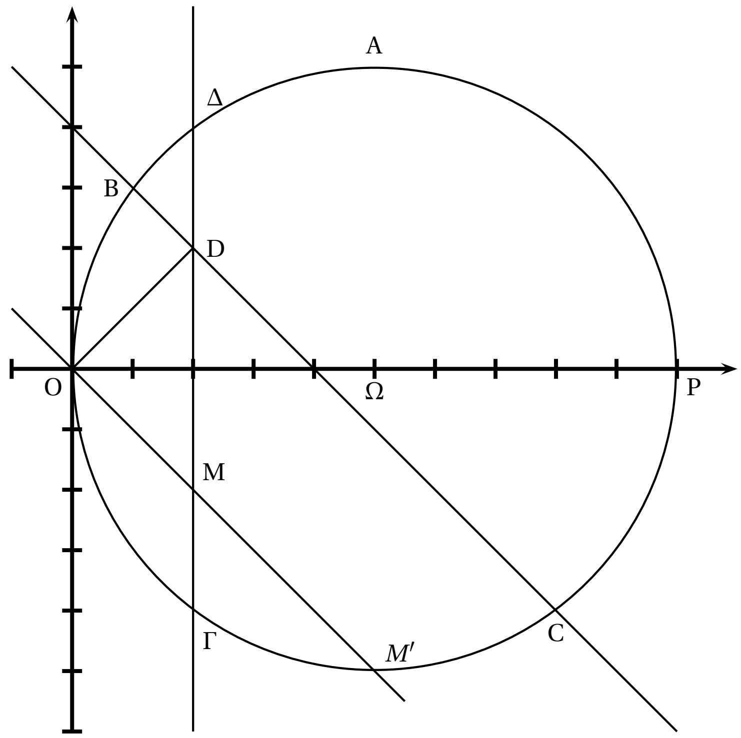
Partie B

1. $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \arg\dfrac{z'}{z} = \arg\dfrac{20}{z\overline{z}}$. Or $z\overline{z}$ est un réel (strictement positif) donc de même $\dfrac{20}{z\overline{z}}$. Par suite $\arg\dfrac{z'}{z} = 0 + k.2\pi$: les points O, M, M′ sont alignés.

2. **a.** $M \in \Delta$ donc son affixe z est du type $2 + iy$, où y désigne un réel quelconque.
On en déduit que $\overline{z} = 2 - iy$ donc $z + \overline{z} = 4$.

b. $z' + \overline{z'} = \dfrac{20}{\overline{z}} + \dfrac{20}{z} = \dfrac{20(z+\overline{z})}{z\overline{z}} = \dfrac{80}{z\overline{z}}$. Par suite $5(z' + \overline{z'}) = \dfrac{400}{z\overline{z}} = \dfrac{20}{\overline{z}} \times \dfrac{20}{z} = z' \times \overline{z'}$.

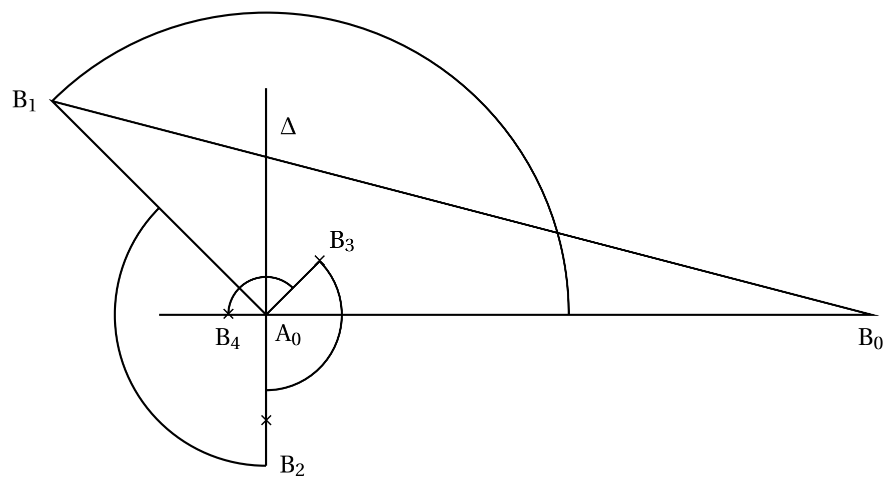
c. Démontrons que $M' \in \Gamma$ en établissant que $\Omega M'^2 = 25$.
$\overrightarrow{\Omega M'}$ a pour affixe $z' - 5$, donc $\Omega M'^2 = (z'-5)\overline{(z'-5)}$.
Or $(z'-5)\overline{(z'-5)} = (z'-5)(\overline{z'} - 5) = z'\overline{z'} - 5(z' + \overline{z'}) + 25$. D'après la relation établie en **b.** il en résulte que $(z'-5)\overline{(z'-5)} = 25$ c'est à dire que $\Omega M'^2 = 25$: $M' \in \Gamma$.
On sait de plus, d'après la question **1.**, que $M' \in (OM)$. Donc M′ est bien le point d'intersection (autre que O) de la droite (OM) et du cercle Γ.



Exercice 4

Exercice de spécialité

1. A_0 et B_0 ont été choisis de façon quelconque avec $A_0B_0 = 8$.
   On peut vérifier que $A_0B_i = \frac{1}{2}A_0B_{i-1}$ et que une mesure de $\left(\overrightarrow{A_0B_{i-1}}\ , \overrightarrow{A_0B_i}\right)$ est $\frac{3\pi}{4}$ avec $1 \leqslant i \leqslant 4$.



2. On sait que l'image d'un triangle par une similitude plane est un triangle semblable. Ici $A_0 = S(A_0)$, $B_{n+1} = S(B_n)$ et $B_{n+2} = S(B_{n+1})$. Donc le triangle $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ est l'image par la similitude S du triangle $A_0B_nB_{n+1}$: ces triangles sont semblables.
3. **a.** $\ell_{n+1} = B_{n+1}B_{n+2} = S(B_n)S(B_{n+1})$. Par suite $\ell_{n+1} = \frac{1}{2}\ell_n$: la suite (ℓ_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b. On sait que $\ell_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \ell_0$.

c. On sait que $\sum_n = \ell_0 \dfrac{-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+1}{\dfrac{1}{2}}$. Donc $\sum_n = 2\ell_0\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_n = 2\ell_o$.

4. **a.** Comme 3 et 4 sont premiers entre eux, il existe des couples d'entiers relatifs $(u\ ;\ v)$ tels que $3u-4v=2$; $(2\ ;\ 1)$ constitue une solution particulière. On en déduit que les solutions de $3x-4y=2$ sont celles de $3x-4y=3\times 2-4\times 1$, soit encore celles de $3(x-2)=4(y-1)$.
Le théorème de Gauss s'applique : 4 divise $3(x-2)$, 4 est premier avec 3 donc 4 divise $x-2$ c'est à dire qu'il existe un entier t tel que $x-2=4t$ soit $x=2+4t$.
On en déduit facilement que $y-1=3t$ soit $y=1+3t$.
En résumé les solutions de $3x-4y=2$ sont les couples d'entiers relatifs de la forme $(2+4t\ ,\ 1+3t)$, avec $t\in\mathbb{Z}$.

b. Comme par définition de la suite de points (B_n), on a $\mathrm{B}_n = \mathrm{S}^n(\mathrm{B}_0)$, on en déduit que une mesure de $\left(\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0}\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{B}_n}\right)$ est $n\times\dfrac{3\pi}{4}$, avec $n\in\mathbb{Z}$.
Pour que le point B_n appartienne à Δ il est nécessaire et suffisant que $n\times\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}+k\pi$, où $(n, k)\in\mathbb{Z}^2$.
On en déduit que (n, k) est solution de $3n=2+4k$ soit de $3n-4k=2$.
Il résulte du **a.** que n est du type $2+4t$, avec $t\in\mathbb{Z}$.
Les entiers naturels n pour lesquels $\mathrm{B}_n\in\Delta$ sont donc du type $2+4t$ avec $t\in\mathbb{N}$.