

ÉTUDE D'UNE TRANSFORMATION

Étude expérimentale

On désigne par (o, \vec{i}, \vec{j}) le repère orthonormal du plan complexe.

En utilisant un logiciel de géométrie, on veut déterminer les effets sur des cercles et des droites de la transformation I qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$, où z et z' désignent des complexes non nuls tels que

$$z' = \frac{1}{\bar{z}}$$

1. Créer un point M libre sur un cercle c_0 de centre o et de rayon 2. Construire le point M' image de M par I .
 - (a) Que décrit M' lorsque M décrit le cercle c_0 ?
Caractériser aussi précisément que possible l'image de c_0 .
 - (b) Comparer les arguments de z et z' .

Appeler l'examinateur pour vérifier les conjectures énoncées.

2. Créer un point R libre sur le cercle c_2 de centre $A(2)$ et de rayon 2. Construire le point R' image de R par I . Que décrit R' lorsque R décrit le cercle c_2 ?
3. Créer un point N libre sur la droite d passant par $B(-2)$ et de vecteur directeur \vec{j} . Construire le point N' image de N par I . Que décrit N' lorsque N décrit la droite d ? Caractériser aussi précisément que possible l'image de d .

Appeler l'examinateur pour vérifier les conjectures énoncées.

Démonstration

1. Déterminer le module et l'argument de z' en fonction du module et de l'argument de z .
2. Déterminer $I \circ I$.

Appeler l'examinateur pour vérifier le résultat.

3. Quelle est l'image par I d'un cercle de centre o et de rayon r ? Quelle est l'image par I d'une droite passant par o ? Justifier les réponses.
4. On note $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, avec x, y, x' et y' des réels.
 - (a) Déterminer x' et y' en fonction de x et y .
 - (b) On suppose que M appartient au cercle c_2 de rayon r et de centre $A(r)$. Vérifier que o est sur le cercle c_2 . Donner une relation liant x, y et r .
 - (c) Calculer $2r x'$ et vérifier que c'est une constante. Que peut-on en déduire sur la position de M' ?
 - (d) Quelle est donc l'image par I du cercle c_2 ? Justifier la réponse.
5. En déduire l'image par I d'une droite qui ne passe pas par o et de vecteur directeur \vec{j} ?

Production demandée

- La figure qui permet de voir les effets.
- Les démonstrations de la partie théorique.