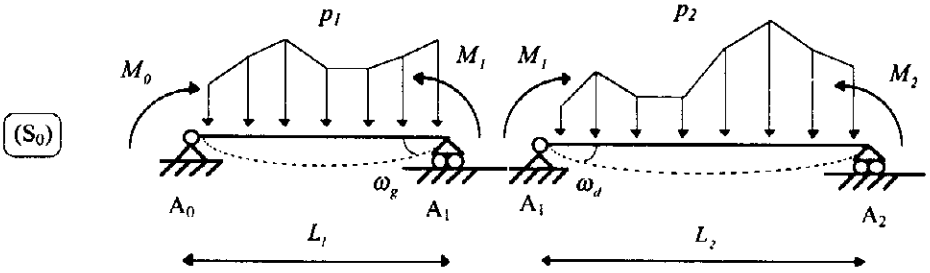


Le système  $(S_0)$  se présente sous la forme des deux poutres isostatiques chargées de la manière suivante :



Le système  $(S_0)$  est équivalent au système  $(S)$  à condition que les moments sur appuis  $M_0$ ,  $M_1$  et  $M_2$  respectent la condition suivante :

$$L_1 M_0 + 2M_1(L_1 + L_2) + L_2 M_2 = 6EI(\omega_d - \omega_g)$$

avec  $\omega_d = \frac{1}{EI} \int_0^{L_2} mf_2(x) \left[ \frac{x}{L_2} - 1 \right] dx$  et  $\omega_g = \frac{1}{EI} \int_0^{L_1} mf_1(x) \left[ \frac{x}{L_1} \right] dx$

**Notations**

$mf_1(x)$  représente le moment fléchissant dû au chargement  $p_1$  dans la poutre isostatique  $A_0A_1$  de longueur  $L_1$ ; de même,  $mf_2(x)$  est le moment fléchissant dû au chargement  $p_2$  dans la poutre isostatique  $A_1A_2$  de longueur  $L_2$ .

$E$  est le module d'élasticité longitudinale du matériau constituant la poutre et  $I$ : le moment quadratique de la section transversale.

$\omega_d$  représente la rotation de la section en  $A_1$ , de la poutre isostatique  $A_1A_2$  soumise au chargement  $p_2$ .

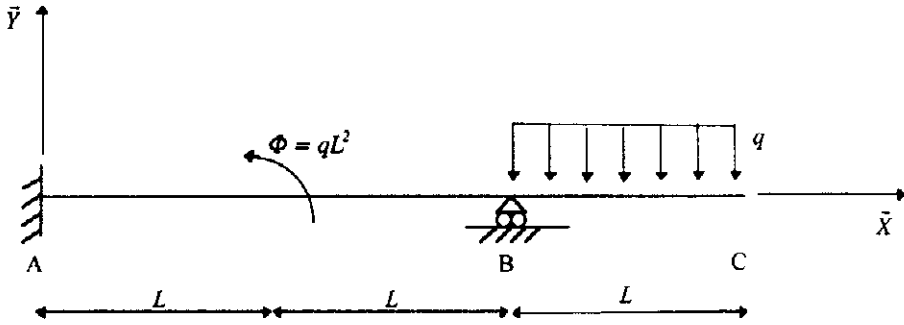
$\omega_g$  représente la rotation de la section en  $A_1$ , de la poutre isostatique  $A_0A_1$  soumise au chargement  $p_1$ .

La connaissance de ces moments sur appuis permet de déterminer les sollicitations internes dans la poutre hyperstatique du système  $(S)$ .

**Relations entre les sollicitations internes et les moments sur appuis**

Les sollicitations internes dans la travée hyperstatique sont déterminées par superposition des sollicitations internes dues au chargement  $p$  et celles dues aux moments sur appuis.

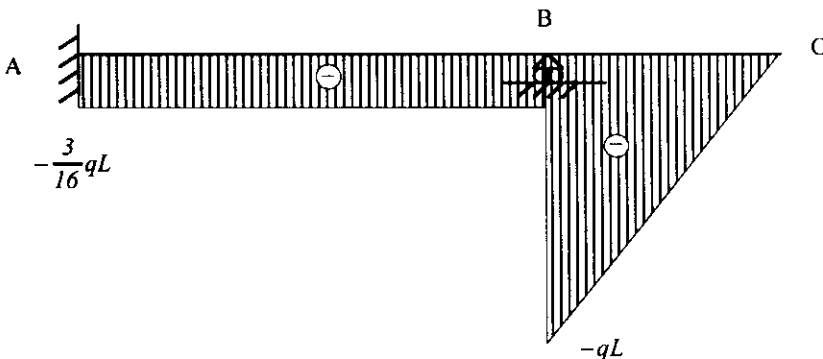
Ce qui donne, sous forme de tableaux :



Zones	AB ( $0 < x < L$ )	BC ( $L < x < 2L$ )	CD ( $2L < x < 3L$ )
$v(x)$	$-\frac{1}{2}qL$	$-\frac{1}{2}qL$	-
$mf(x)$	$\frac{1}{2}qLx$	$\frac{1}{2}qL(x-2L)$	-
$V(x)$	$-\frac{3}{16}qL$	$-\frac{3}{16}qL$	$-q(3L-x)$
$Mf(x)$	$\frac{3}{16}qLx + \frac{1}{8}qL^2$	$\frac{3}{16}qLx - \frac{7}{8}qL^2$	$-\frac{1}{2}q(3L-x)^2$

2) Diagramme des sollicitations internes

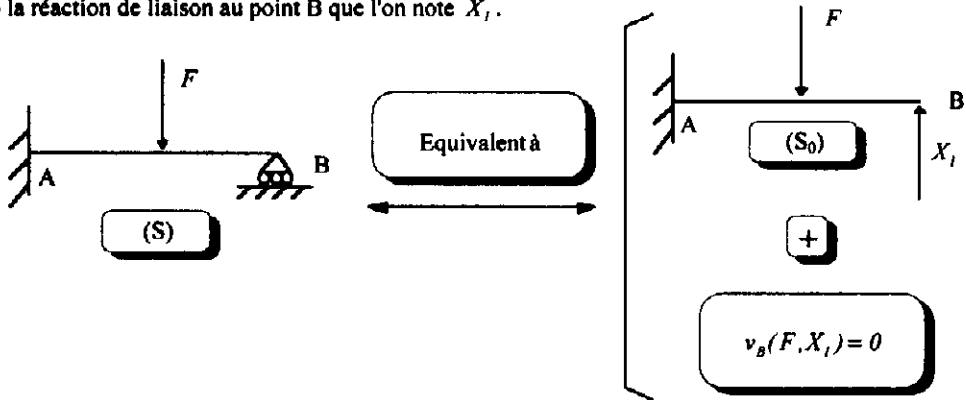
Diagramme de l'effort tranchant :



La méthode consiste à écrire que le système ( $S_0$ ) ci-dessus est équivalent au système (S) à condition que la translation verticale du point B soit égale à zéro.

Il faut appliquer au système ( $S_0$ ) le chargement du système (S) qui comprend :

- la charge concentrée  $F$ ,
- la réaction de liaison au point B que l'on note  $X_1$ .



La charge  $X_1$  est l'inconnue hyperstatique.

La condition de translation verticale nulle en B :  $v_B(F, X_1) = 0$  donne une équation supplémentaire qui vient s'ajouter aux trois équations du principe fondamental de la statique. Ces quatre équations permettront de déterminer les quatre inconnues :  $X_A, Y_A, M_A$  et  $X_1$ .

On remarque que résoudre un système hyperstatique revient à calculer le déplacement de certains points d'une structure isostatique équivalente.

Pour cela, on pourrait utiliser les formules de Bresse, mais il est plus simple et plus rapide d'appliquer un principe énergétique : le principe des travaux virtuels.

La méthode des forces consiste à appliquer le principe des travaux virtuels. En effet, ici, les inconnues du problème sont des forces par opposition à la méthode des déplacements où ce sont les déplacements qui constituent les inconnues.

## Enoncé du principe des travaux virtuels

Le travail de déformation de l'état réel de contrainte dans le champ de déformation virtuelle est égal au travail des forces extérieures connues et des réactions inconnues dans le champ de déplacement virtuel, quel que soit ce champ virtuel.

Par application du théorème de réciprocité, on peut écrire :

**Le travail de déformation des contraintes virtuelles dans le champ de déformation réelle est égal au travail des efforts virtuels dans le champ de déplacement réel.**

$$\int_{Structure} [Mf^*(s) \cdot \chi(s) + N^*(s) \cdot \epsilon(s)] \cdot ds = \sum_i (F_i^* u_i + \Phi_i^* \Omega_i)$$

*Nota* : On néglige le travail de déformation de l'effort tranchant devant celui du moment fléchissant.

## Notations :

$Mf^*(s)$  : moment fléchissant dans la structure virtuelle à l'abscisse curviligne  $s$ .

$N^*(s)$  : effort normal dans la structure virtuelle à l'abscisse curviligne  $s$ .

$\chi(s)$  : rotation de section à l'abscisse curviligne  $s$  (structure réelle).  $\chi(s) = \frac{Mf(s)}{EI_z}$

$\varepsilon(s)$  : déformation de la section à l'abscisse curviligne  $s$  (structure réelle).  $\varepsilon(s) = \frac{N}{ES}$

$F_i^*$  : effort virtuel.

$\Phi_i^*$  : couple virtuel.

$u_i$  : translation d'un point du système réel.

$\Omega_i$  : rotation d'un point du système réel.

## Théorème de la charge unité

Si l'on prend une charge unité comme effort virtuel, le second terme de l'égalité mesure la composante du déplacement suivant la direction orientée par cette charge.

## Méthode graphique de calcul du travail de déformation

Il s'agit d'une méthode qui permet de calculer graphiquement le travail de déformation. Si l'on note  $Mf_1(x)$  et  $Mf_2(x)$  les expressions des moments fléchissants dans une poutre de longueur  $L$ , le travail de déformation s'écrit :

$$\int_0^L Mf_1(x) \cdot \chi_2(x) \cdot dx = \int_0^L \frac{Mf_1(x) \cdot Mf_2(x)}{EI_z} dx$$

Le calcul de la somme intégrale du produit de  $Mf_1(x)$  et de  $Mf_2(x)$  peut être effectué comme l'indiquent les figures ci-dessous :

