3- Résolution d'équations trigonométriques

3-1. Équation sin*x* = *a*

Soit a un réel donné. L'équation $\sin x = a$ possède :

- aucune solution si $a \notin [-1;1]$;
- une infinité de solution si $a \in [-1;1]$.

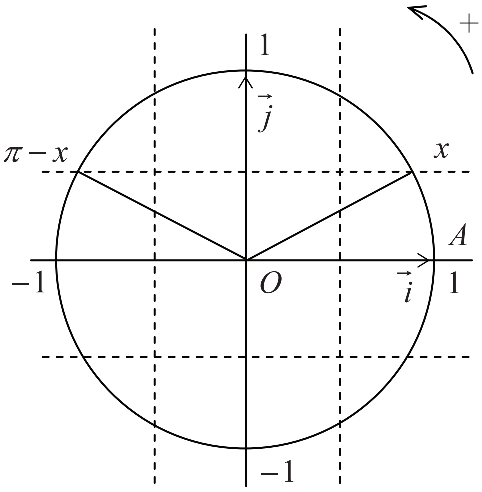
$x = Arc\sin a$ désigne l'unique solution comprise dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

L'ensemble des solutions sur IR est :

$$x = Arc\sin a + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

ou

$$x = \pi - Arc\sin a + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}.$$



3-2. Équation cos*x* = *a*

Soit a un réel donné. L'équation $\cos x = a$ possède :

- aucune solution si $a \notin [-1;1]$;
- une infinité de solution si $a \in [-1;1]$.

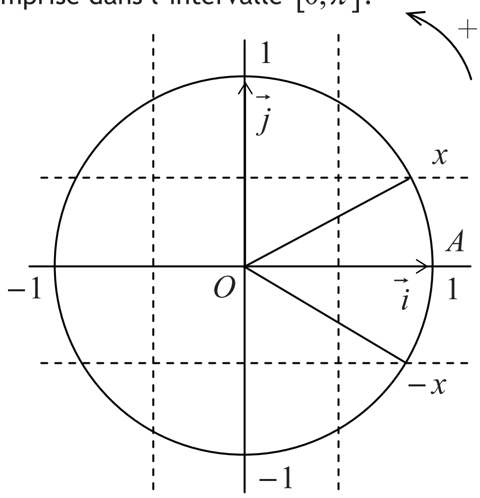
$x = Arc\cos a$ désigne l'unique solution comprise dans l'intervalle $[0;\pi]$.

L'ensemble des solutions sur IR est :

$$x = Arc\cos a + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

ou

$$x = -Arc\cos a + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}.$$



2- Résolution d’une équation du second degré à coefficients complexes

2-1. Racines carrées d’un nombre complexe

Soit Z un nombre complexe. On appelle racines carrées de Z tous les nombres complexes z tels que $z^2 = Z$.

• **Remarque**

L’écriture avec le symbole $\sqrt{}$ n’est autorisée que pour la racine carrée positive d’un nombre réel positif.

• **Exemple**

Le complexe $z = 2 + 3i$ est l’une des racines carrées du complexe $Z = -5 + 12i$.

2-2. Équation du second degré à coefficients complexes

L’équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont des nombres complexes donnés admet toujours deux solutions (éventuellement confondues) dans $\mathbb{C}$:

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$$

où δ est une racine carrée (quelconque) du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. On a donc :

$$\delta^2 = \Delta$$

• **Remarque**

Ces résultats généralisent les formules relatives à la résolution des équations du second degré à coefficients réels. Elles s’appliquent donc dans tous les cas, que le discriminant Δ soit réel positif, nul, réel négatif ou encore complexe.

2-3. Méthode de détermination des racines carrées d’un nombre complexe

Soit un nombre complexe $Z = a + ib$, $b \neq 0$. On souhaite déterminer tous les nombres complexes $z = x + iy$ tels que $z^2 = Z$.

$z^2 = Z$ s’écrit :

$$(x+iy)^2 = a + ib \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = a + ib$$

$|z^2| = |Z|$ et $|z^2| = |z|^2$, on obtient l’égalité suivante :

$$x^2 + y^2 = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

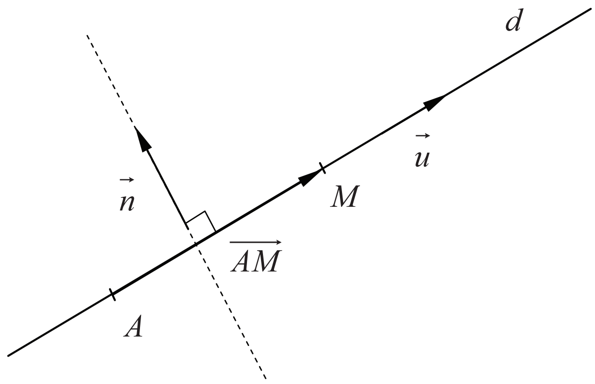
3- Équations cartésiennes dans le plan

3-1. Caractérisation d'une droite dans le plan

Soit d une droite, A un point de d et $\vec{n}$ un vecteur normal à la droite d.
La droite d est l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

On a l'équivalence suivante :

$$M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$



La droite d est l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AM}$ soient orthogonaux.

3-2. Détermination de l'équation d'une droite dans le plan

Soit $\vec{n}\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$ un vecteur du plan $\mathscr{P}$. On rappelle les propriétés suivantes :

(1) Si le vecteur $\vec{n}\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$ est normal à une droite d, alors d a une équation de la forme : $ax + by + c = 0$ où c est un réel.
(2) Réciproquement, toute droite d ayant une équation de la forme : $ax + by + c = 0$, avec $(a;b) \neq (0;0)$, admet le vecteur $\vec{n}\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$ comme vecteur normal.

• **Démonstration**
(1) Soit $A(x_A; y_A)$ un point de d et $M(x; y)$ un point du plan $\mathscr{P}$, alors :

$$M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \Leftrightarrow ax + by - (ax_A + by_A) = 0$$

On obtient ainsi une équation du type :

$$ax + by + c = 0 \text{ en posant } c = -(ax_A + by_A).$$

2-3.2 Notation différentielle de la dérivée

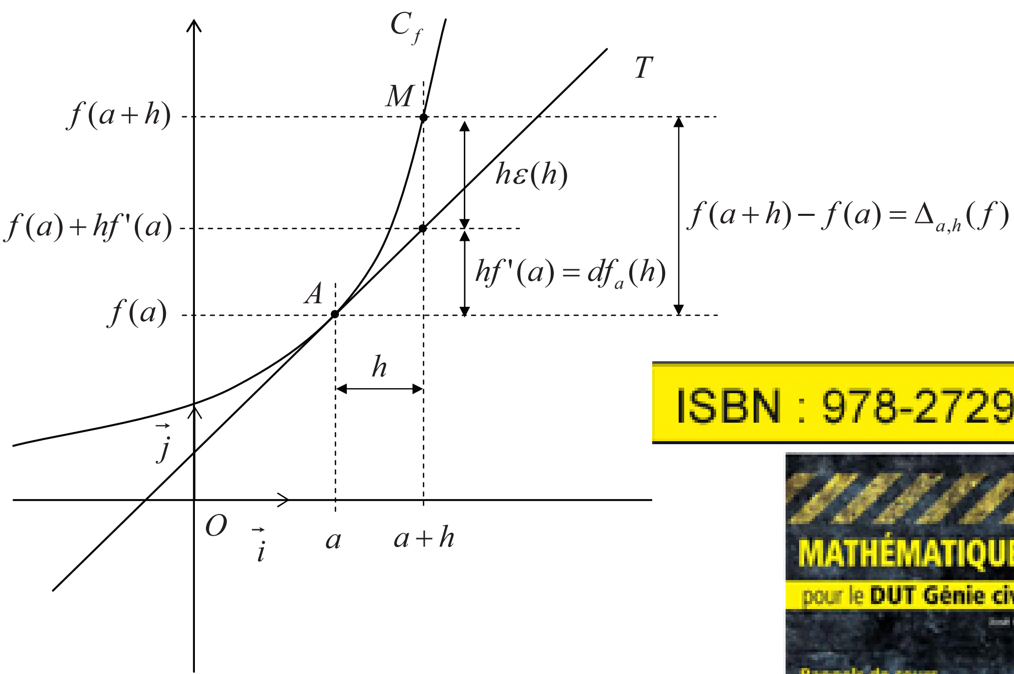
Pour simplifier la notation, la différentielle de la fonction f au point d'abscisse x est notée : $df : h \mapsto f'(x) \cdot h$

Si on considère la fonction identité : $x \mapsto x$, sa différentielle est $dx : h \mapsto h$

On obtient donc une relation entre les deux différentielles df et dx :

$$df = f'(x) \cdot dx \text{ , soit encore : } f'(x) = \frac{df}{dx}$$

Les différentes grandeurs étudiées sont reportées sur le graphique ci-dessous. On rappelle que le coefficient directeur de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse a est égal à $f'(a)$.



6- Fonctions Arcsinus, Arccosinus et Arctangente

6-1. Fonction Arcsinus

La fonction sinus est continue et strictement monotone sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Elle est bijective de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ vers $[-1;1]$. La fonction réciproque, Arcsinus, est une bijection de $[-1;1]$ vers $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$:

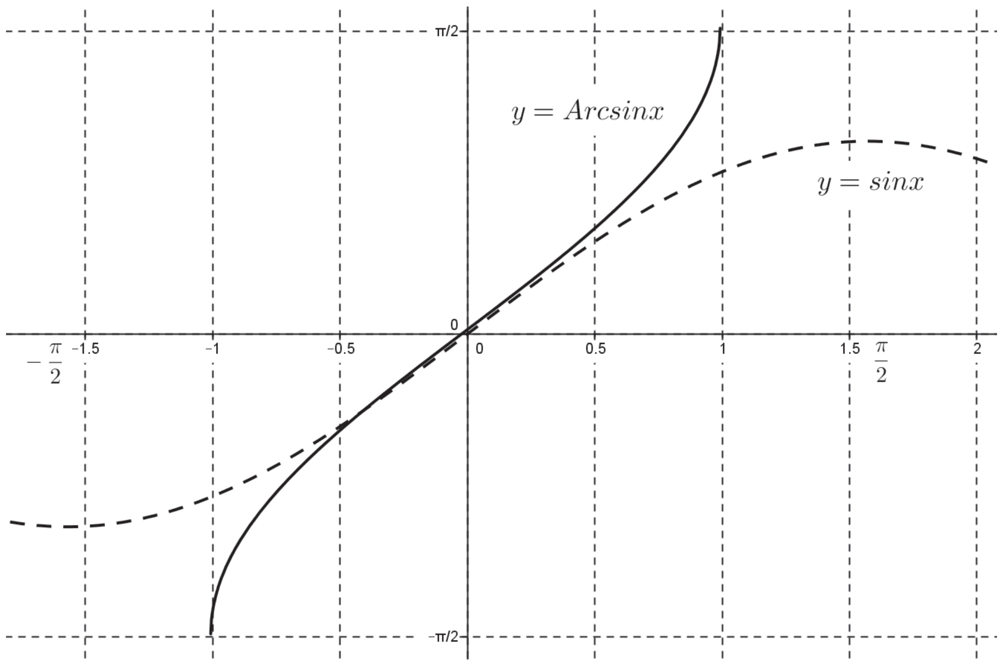
$\forall x \in [-1;1]$, $\sin(Arc\sin x) = x$ et $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $Arc\sin(\sin x) = x$

En utilisant le théorème de dérivation :

$$(Arc\sin x)' = \frac{1}{\cos(Arc\sin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

En effet : $\cos^2(Arc\sin x) + \sin^2(Arc\sin x) = 1$ avec $\sin^2(Arc\sin x) = x^2$

D'où $\cos^2(Arc\sin x) = 1 - x^2$ et $\cos(Arc\sin x) = \sqrt{1-x^2}$



8-3. Tableau des dérivées

u représente une fonction composée. Par exemple, $u(x) = \ln\left(x^2+1\right)$.

$f(x)$	$f'(x)$	u	u'
x^n	nx^{n-1}	u^n	$n \cdot u' \cdot u^{n-1}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{u^n}$	$-\frac{n \cdot u'}{u^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
e^x	e^x	e^u	$u' \cdot e^u$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin u$	$u' \cdot \cos u$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos u$	$-u' \cdot \sin u$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan u$	$u'(1+\tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$Arc\sin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$Arc\sin u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$Arc\cos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$Arc\cos u$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$Arc\tan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$Arc\tan u$	$\frac{u'}{1+u^2}$
shx	chx	shu	$u' \cdot chu$
chx	shx	chu	$u' \cdot shu$
thx	$1-th^2x = \frac{1}{ch^2x}$	thu	$u' \cdot (1-th^2u) = \frac{u'}{ch^2u}$

5- Primitives usuelles

u représente une fonction composée. Par exemple, $u(x) = \ln\left(x^2+1\right)$.

f	Une primitive F	u	Une primitive U
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$u' \cdot u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}$	$\frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{n-1}\frac{1}{u^{n-1}}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
e^x	e^x	$u' \cdot e^u$	e^u
$\sin x$	$-\cos x$	$u' \cdot \cos u$	$\sin u$
$\cos x$	$\sin x$	$-u' \cdot \sin u$	$\cos u$
$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$u'(1+\tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$	$\tan u$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$Arc\sin x$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$Arc\sin u$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$Arc\cos x$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$Arc\cos u$
$\frac{1}{1+x^2}$	$Arc\tan x$	$\frac{u'}{1+u^2}$	$Arc\tan u$
chx	shx	$u' \cdot chu$	shu
shx	chx	$u' \cdot shu$	chu
$1-th^2x = \frac{1}{ch^2x}$	thx	$u' \cdot (1-th^2u) = \frac{u'}{ch^2u}$	thu

A – Équations différentielles

1- Définitions

1-1. Équation différentielle

On appelle équation différentielle, une équation où interviennent une fonction et une ou plusieurs de ses dérivées successives.

$$f(x, y, y', y'') = 0 \text{ ou } f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

• Résolution d'une équation différentielle

Résoudre une équation différentielle sur un intervalle I, c'est déterminer l'ensemble des fonctions dérivables sur I qui vérifient cette équation. La résolution d'équations différentielles est un outil indispensable pour l'étude de l'évolution des phénomènes physiques en général. En effet, les équations traduisant les évolutions physiques sont très souvent des équations différentielles.

• Exemple

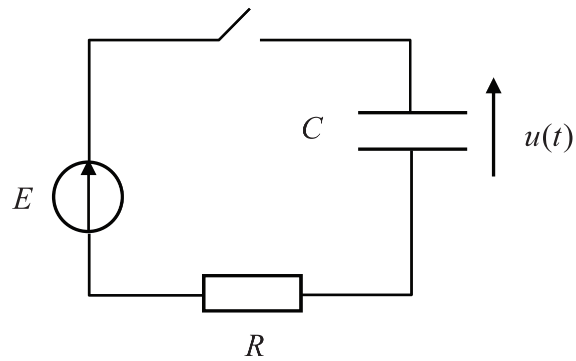
En physique, dans un circuit RC, la tension $u(t)$ aux bornes d'un condensateur est solution de l'équation différentielle suivante :

$$u' + \frac{1}{\tau}u = \frac{E}{\tau}$$

où E est la tension continue délivrée par le générateur et $\tau = RC$ la constante de temps du circuit.

La solution $u(t)$ est :

$$u(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



• Courbe intégrale

La représentation graphique d'une des solutions d'une équation différentielle est appelée courbe intégrale.

1-2.2 Dérivées partielles secondes

Si on dérive une fonction f par rapport à la première variable x et si on dérive à nouveau le résultat par rapport à la variable y, on obtient une nouvelle fonction appelée dérivée partielle seconde (ou dérivée partielle d'ordre 2), notée $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Le théorème de Schwarz précise que si la fonction f admet des dérivées partielles d'ordre 2 suivant les variables x et y alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

• **Remarque**

L'ordre dans lequel on dérive n'a pas d'incidence sur le résultat. Si on dérive deux fois de suite suivant la variable x, on note cette dérivée partielle seconde : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

• **Exemple**

Soit f la fonction définie sur IR^2 par :

$$f(x,y) = 3x^4 - 2x^3y^2 + 5y^3$$

On obtient les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 12x^3 - 6x^2y^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4x^3y + 15y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = -12x^2y \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = -12x^2y$$

On vérifie bien l'égalité suivante :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$

On obtient les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 36x^2 - 12xy^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -4x^3 + 30y$$

2-2. Orthogonalité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace $\mathscr{E}$ sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

• **Remarque**
Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur de l'espace.

2-3. Équation d'une sphère dans l'espace

Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et de rayon r.

La sphère $\mathscr{S}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que : $AM = r$.

$$M \in \mathscr{S} \Leftrightarrow AM = r \Leftrightarrow AM^2 = r^2 \Leftrightarrow (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = r^2$$

L'équation de la sphère $\mathscr{S}$ dans l'espace a l'expression suivante :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = r^2$$

3- Produit vectoriel

3-1. Trièdre direct

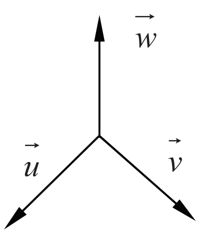
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $\mathscr{E}$.

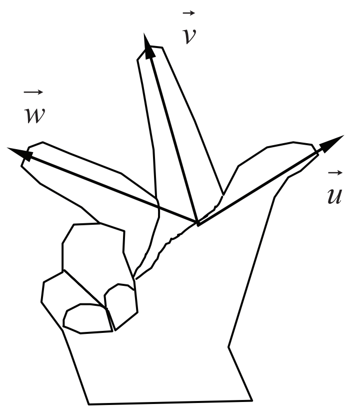
$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un trièdre direct si les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ vérifient les deux conditions suivantes :

(1) $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires ;

(2) Le triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ vérifie la règle des 3 doigts de la main droite :

- $\vec{u}$ dans la direction du pouce ;
- $\vec{v}$ dans la direction de l'index ;
- $\vec{w}$ dans la direction du majeur.

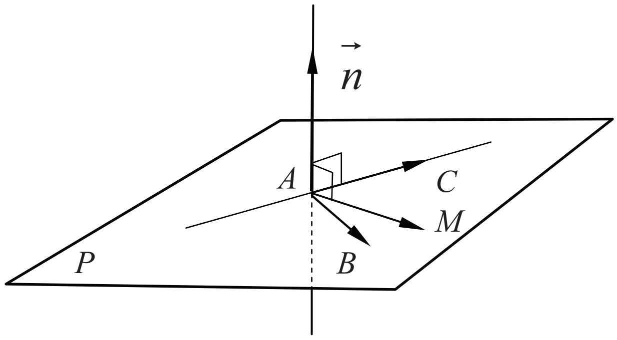




4- Équation cartésienne d'un plan dans l'espace

4-1. Caractérisation d'un plan dans l'espace

Un vecteur normal à un plan P est un vecteur non nul $\vec{n}$ dont la direction est orthogonale au plan P.



Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace $\mathscr{E}$. On a les propriétés suivantes :

(1) Le plan (ABC) admet le vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ comme vecteur normal.

(2) Le plan P qui passe par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

4-2. Détermination de l'équation d'un plan dans l'espace

• **Définitions**

(1) Tout plan P de l'espace admet une équation du type : $ax + by + cz + d = 0$ où l'un au moins des réels a, b et c est non nul et d est un réel quelconque. De plus, le vecteur non nul $\vec{n}(a;b;c)$ est normal à P.

(2) Soit a, b, c et d des réels tels que l'un au moins des réels a, b et c n'est pas nul. L'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan P de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$.

5-5. Produit de matrices

Le produit de matrices est associé à la composition des endomorphismes. On considère deux endomorphismes f et g d'un espace vectoriel E de base $D = \left(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};\overrightarrow{e_3};.........;\overrightarrow{e_n}\right)$. On note A, B et C les matrices de f , g et $g \circ f$ par rapport à la base D, et a_{ij} , b_{ij} et c_{ij} les coefficients de ces matrices.

La matrice C est égale au produit de la matrice B avec la matrice A :

$$C = B \times A$$

avec :

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & & & & \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & \boxed{c_{ij}} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nj} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

On obtient le coefficient c_{ij} en posant le calcul suivant :

$$C = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & & & & \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Le coefficient c_{ij} sur la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne de C s'obtient en additionnant les produits deux à deux des coefficients de la $i^{ème}$ ligne de B avec ceux de la $j^{ème}$ colonne de A.

$$c_{ij} = b_{i1}.a_{1j} + b_{i2}.a_{2j} + ... + b_{ik}.a_{kj} + ... + b_{in}.a_{nj}$$

• **Remarque**

La multiplication de matrices ne consiste donc pas en la multiplication des coefficients situés aux mêmes positions ($c_{ij} \neq b_{ij}.a_{ij}$). Une conséquence importante est que cette multiplication n'est pas commutative : en général, le produit $B \times A$ n'est pas égal au produit $A \times B$.

D – Ajustement linéaire

1- Présentation

Pour une population statistique donnée, on étudie simultanément deux caractères statistiques différents X et Y. On fait l'hypothèse que le caractère Y dépend linéairement du caractère X. Il s'agit de déterminer les réels a et b tels que :

$$Y = aX + b$$

• **Variable indépendante et variable dépendante**
L'objectif d'un ajustement linéaire est de proposer un modèle permettant de calculer la valeur de Y en fonction de X. La variable X est la variable indépendante ou explicative, et la variable Y est la variable dépendante ou à expliquer.

2- Définitions et ajustement linéaire

2-1. Nuage de points associé à une population

Il s'agit d'étudier deux caractères X et Y chez les individus d'une population statistique. On dispose, pour chaque individu ω_i, des modalités x_i et y_i prises par les caractères X et Y. On représente dans un repère cet individu ω_i par le point M_i de coordonnées $(x_i ; y_i)$.

• **Nuage de points**
On appelle nuage de points l'ensemble des points obtenus en représentant toute la population.

• **Point moyen**
On appelle point moyen du nuage de points le point G de coordonnées $(\overline{X} ; \overline{Y})$ où $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ sont les moyennes arithmétiques des séries statistiques X et Y.

2-2. Principe de l'ajustement linéaire

Il s'agit de déterminer les réels a et b tels que la distance moyenne entre les points du nuage et la droite D d'équation $y = ax + b$ soit minimale.

Pour chaque point M_i, d'abscisse x_i, on considère la distance définie par l'écart entre le point théorique, situé sur la droite, et le point M_i du nuage de points. Cette distance se mesure algébriquement en faisant la différence entre les ordonnées de ces deux points d'abscisses identiques.

Solution

Il s'agit de résoudre l'inéquation suivante :

$$\left(1+\frac{10}{100}\right)^n > 2$$

On résout cette inéquation :

$$\left(1+\frac{10}{100}\right)^n > 2 \Leftrightarrow n\ln(1.10) > \ln 2 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 2}{\ln(1.10)} \approx 7.27$$

On choisit $n = 8$. Le prix aura doublé au bout de la $8^{\text{ème}}$ année.

❑ Exercice A-4

Résoudre dans IR les inéquations et équations suivantes :

(1) $5^x = 3$; (2) $9^x - 3^x - 2 = 0$; (3) $3^{2x+1} > 2$; (4) $9^x - 3^{x+1} - 10 > 0$

Solution

(1) On résout cette équation :

$$5^x = 3 \Leftrightarrow x\ln 5 = \ln 3 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 3}{\ln 5}$$

(2) On résout cette équation en posant $X = 3^x$:

$$9^x - 3^x - 2 = 0 \Leftrightarrow X^2 - X - 2 = 0$$

On obtient les deux racines suivantes :

$$X_1 = -1 \text{ et } X_2 = 2$$

L'équation $3^x = X_1$ n'admet aucune solution.

L'équation $3^x = X_2$ donne la solution suivante :

$$x = \frac{\ln X_2}{\ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

Finalement :

$$9^x - 3^x - 2 = 0 \text{ pour } x = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

B – TRIGONOMÉTRIE

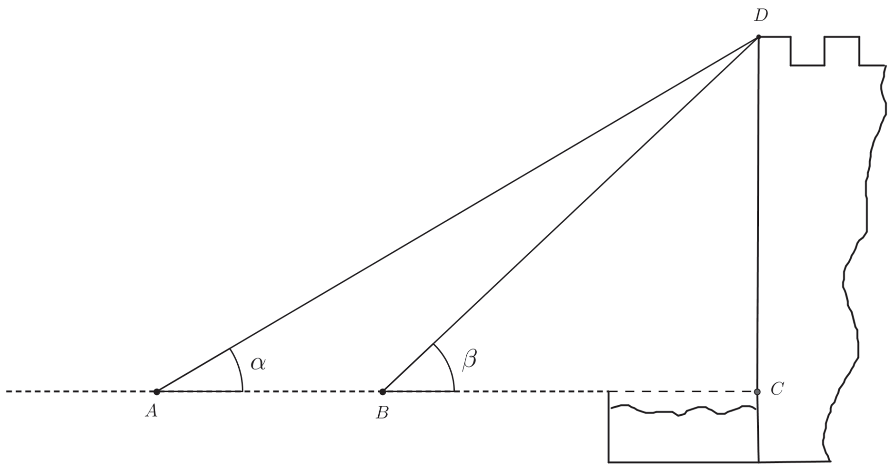
❑ Exercice B-1

On souhaite déterminer la hauteur d'un bâtiment dont la base (le point C) est inaccessible. A l'aide d'un théodolite, on mesure les deux angles verticaux α et β ainsi que la longueur $AB = L$.

1. Calculer la hauteur $h = CD$ du bâtiment en fonction des valeurs mesurées α, β et L.
2. On a mesuré les valeurs suivantes :

$$\alpha = 51{,}25gon\ ,\ \beta = 72{,}35gon \text{ et } AB = 10m.$$

En déduire la hauteur du bâtiment à $10^{-1}m$ près.



Solution

1. On écrit les égalités suivantes :

$$\tan\alpha = \frac{h}{AC} \text{ et } \tan\beta = \frac{h}{AC-L}$$

On en déduit l'équation :

$$\tan\beta = \frac{h}{\dfrac{h}{\tan\alpha} - L} \Leftrightarrow \tan\beta = \frac{h\tan\alpha}{h - L\tan\alpha}$$

On obtient :

$$h = \frac{L\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha}$$

2. On obtient :

$$h \approx 20.096m\ , \text{ soit } h = 20.1m \text{ à } 10^{-1}m \text{ près.}$$

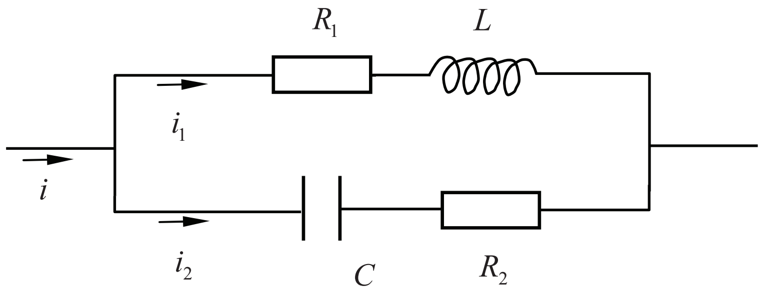
C – NOMBRES COMPLEXES

❑ Exercice C-1

On considère le montage représenté ci-dessous, alimenté par une tension alternative sinusoïdale de fréquence $f = 50Hz$ et de valeur efficace $U = 250V$.

Ce montage comporte :

- deux résisteurs de résistance $R_1 = 100\Omega$ et $R_2 = 150\Omega$;
- une bobine d'inductance pure de valeur $L = 0.24H$;
- un condensateur de capacité $C = 16\mu F$.



En électricité, le nombre complexe i est noté j. On note $\omega = 2\pi f$ la pulsation et on rappelle les expressions des impédances :

- Impédance de la bobine : $Z = jL\omega$;
- Impédance du condensateur : $Z = \dfrac{1}{jC\omega} = -\dfrac{j}{C\omega}$.

Déterminer l'expression complexe, puis le module et l'argument des grandeurs suivantes :

1. L'impédance de chacune des branches du montage.
2. Le courant dans chacune des branches du montage.
3. La tension aux bornes de chacun des dipôles constituant le circuit.
4. Le courant total.
5. L'impédance équivalente à l'ensemble du montage.

➷ Solution

1. Détermination de l'impédance de chacune des branches du montage :

- **Branche supérieure**

$$Z_1 = R_1 + jL\omega$$

On obtient :

$$Z_1 = 100 + 75.40j$$

$$|Z_1| = r_1 = 125.24\Omega \text{ et } \arg(Z_1) = \theta_1 = 0.646rad$$

$$Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + j\sin\theta_1)$$

D – GÉOMÉTRIE DANS LE PLAN

Dans toute cette partie, le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

❑ Exercice D-1

On considère la droite d d'équation :

$$3x-4y+5=0$$

1. Donner les coordonnées de trois points de la droite d.
2. Donner l'ordonnée d'un vecteur directeur de la droite d d'abscisse 1.
3. Donner un vecteur normal $\vec{n}$ à la droite d.
4. Le vecteur $\vec{u}(12;9)$ est-il un vecteur directeur de la droite d ?
5. Le vecteur $\vec{v}(9;-12)$ est-il un vecteur directeur de la droite d ?

✎ Solution

1. On choisit les trois points suivants :

$$A(1;2)\ ;\ B\left(0;\frac{5}{4}\right)\text{ et } C\left(-1;\frac{1}{2}\right)$$

2. Par lecture des coefficients : $\overrightarrow{u_1}\left(1;\frac{3}{4}\right)$ est un vecteur directeur de la droite d.
3. On obtient : $\vec{n}(3;-4)$.
4. On a l'égalité suivante :

$$\vec{u}=12\overrightarrow{u_1}$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u_1}$ sont colinéaires ; le vecteur $\vec{u}(12;9)$ est donc un vecteur directeur de la droite d.

5. Les vecteurs $\vec{v}$ et $\overrightarrow{u_1}$ ne sont pas colinéaires ; le vecteur $\vec{v}(9;-12)$ n'est donc pas un vecteur directeur de la droite d.

❑ Exercice D-2

On donne les coordonnées des points $A(3;1)$ et $B(-2;0)$. On souhaite déterminer une équation de la médiatrice, notée d_m, du segment $[AB]$.

1. Déterminer les coordonnées du point I, milieu de $[AB]$.
2. Déterminer un vecteur normal $\vec{n}$ à la droite d_m.
3. En déduire une équation cartésienne de la droite d_m.

❑ Exercice A-9

On souhaite étudier les fonctions, notées f_k, solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y' - y = \frac{e^x}{x^2}$$

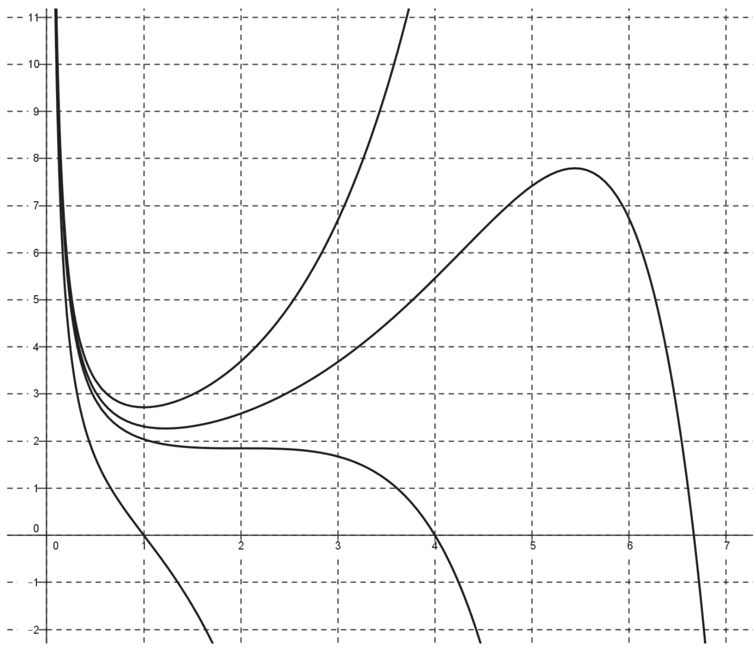
La fonction f_k est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f_k(x) = \frac{kx+1}{x}e^x$$

où k est un nombre réel donné.

On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Déterminer les limites de f_k en 0 et en $+\infty$.
2. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ et déterminer le nombre de solutions sur $]0;+\infty[$ de l'équation $f_k'(x) = 0$.
3. On a tracé sur le graphique ci-dessous les courbes C_{-1}, $C_{-0.25}$, $C_{-0.15}$ et C_0. En utilisant les résultats de la question précédente, reconnaître chacune des courbes.



4. Pour tout réel a strictement positif, on pose :

$$S(a) = \int_a^{a+1} \frac{e^x}{x} dx$$

4.1. Interpréter géométriquement $S(a)$.

4.2. On désigne par F une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{x}$ sur $]0;+\infty[$.

En remarquant que $S(a) = F(a+1) - F(a)$ étudier le sens de variation de la fonction qui à tout réel a élément de $]0;+\infty[$ associe le réel $S(a)$.

4.3. On veut découper dans le plan une bande verticale de largeur une unité de telle sorte que l'aire située dans cette bande entre les courbes C_0 et l'axe (Ox) soit minimale. Comment doit-on procéder ?

Solution

1. On calcule les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} f_k(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{kx+1}{x} e^x = \lim_{x \to +\infty} ke^x .$$

On en déduit les résultats suivants :

$$\lim_{x \to +\infty} f_k(x) = +\infty \text{ si } k \geq 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f_k(x) = -\infty \text{ si } k < 0 .$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_k(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{kx+1}{x} e^x = +\infty$$

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à C_k.

2. On calcule la fonction dérivée :

$$f_k'(x) = -\frac{1}{x^2} e^x + \frac{kx+1}{x} e^x = \frac{kx^2 + x - 1}{x^2} e^x$$

On étudie le nombre de solutions de l'équation $f_k'(x) = 0$:

$$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow kx^2 + x - 1 = 0$$

On calcule le discriminant Δ :

$$\Delta = 1 + 4k$$

C – FONCTIONS POLYNÔMES ET FONCTIONS RATIONNELLES

❑ Exercice C-1

Pour chacune des questions suivantes, on donne un polynôme P ainsi qu'une ou plusieurs racines. Factoriser le polynôme P sous la forme d'un produit de polynômes irréductibles.

1. $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ et $P(-1) = 0$.
2. $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ et $P(1) = 0$.
3. $P(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 4$ et $P(2) = 0$.
4. $P(x) = x^3 + 4x^2 - 8$ et $P(-2) = 0$.
5. $P(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 13x + 6$ et $P(2) = 0$, $P(-3) = 0$.

✎ Solution

1. $P'(-1) \neq 0$; la racine $r_1 = -1$ est d'ordre de multiplicité égal à 1. On effectue la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $(x+1)$:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + x^2 + x + 1 & x+1 \\
-(x^3 + x^2) & \hline \\
\hline
\quad x+1 & x^2+1 \\
-(x+1) & \\
\hline
\quad 0 &
\end{array}
$$

On obtient :

$$P(x) = (x+1)(x^2+1)$$

2. On calcule les valeurs suivantes :

$P'(x) = 3x^2 + 2x - 1$; $P'(1) \neq 0$.

$P^{(2)}(x) = 6x + 2$; $P^{(2)}(1) \neq 0$.

La racine $r_1 = 1$ est d'ordre de multiplicité égal à 1. On remarque que $r_2 = -1$ est une racine évidente de P. $P'(-1) = 0$ et $P^{(2)}(-1) \neq 0$.
La racine $r_2 = -1$ est d'ordre de multiplicité égal à 2.

Finalement :

$$P(x) = (x+1)^2(x-1)$$

3. On calcule les valeurs suivantes :

$P'(x)=6x^2+2x-8$; $P'(2)\neq 0$. La racine $r_1=2$ est d'ordre de multiplicité égal à 1. On effectue la division euclidienne suivante :

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3+x^2-8x-4 & x-2 \\
-(2x^3-4x^2) & \\
\hline
5x^2-8x-4 & 2x^2+5x+2 \\
-(5x^2-10x) & \\
\hline
2x-4 & \\
-(2x-4) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

On obtient :

$$P(x)=(2x^2+5x+2)(x-2)$$

Le polynôme $2x^2+5x+2$ possède deux racines $r_2=-2$ et $r_3=-\dfrac{1}{2}$.

Finalement :

$$P(x)=2(x-2)(x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(x-2)(x+2)(2x+1)$$

4. On calcule les valeurs suivantes :

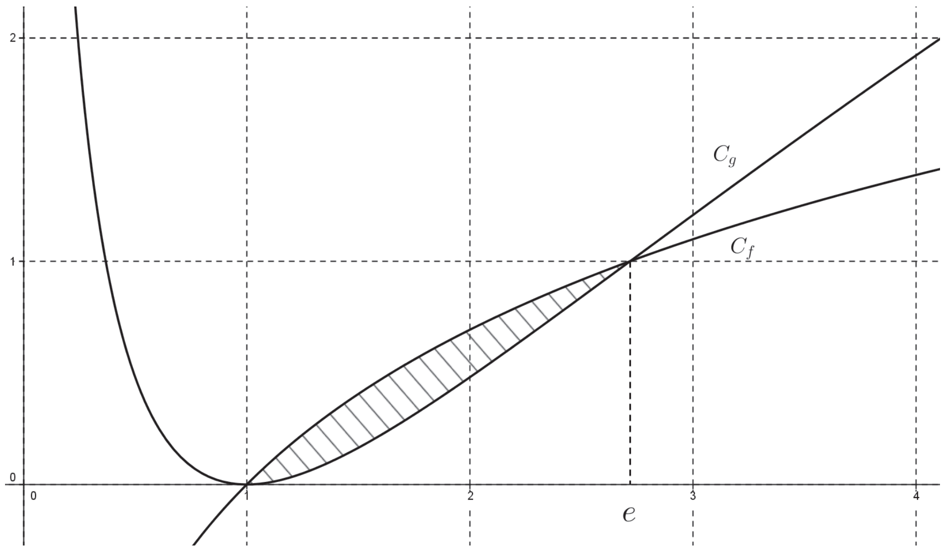
$P'(x)=3x^2+8x$; $P'(-2)\neq 0$. La racine $r_1=-2$ est d'ordre de multiplicité égal à 1. On effectue la division euclidienne suivante :

$$
\begin{array}{l|l}
x^3+4x^2-8 & x+2 \\
-(x^3+2x^2) & \\
\hline
2x^2-8 & x^2+2x-4 \\
-(2x^2+4x) & \\
\hline
-4x-8 & \\
-(-4x-8) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

❑ Exercice D-10

Les courbes C_f et C_g du graphique ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\ln x \quad \text{et} \quad g(x)=(\ln x)^2$$



On cherche à déterminer l'aire S (en unités d'aire) de la partie hachurée du plan.
On note :

$$I=\int_1^e \ln x dx \quad \text{et} \quad J=\int_1^e (\ln x)^2 dx$$

1. Calculer l'intégrale I.
2.1. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J=e-2I$.
2.2. En déduire J.
3. Calculer la valeur de l'aire S.
4. Pour x appartenant à l'intervalle $[1;e]$, on note M le point de la courbe C_f d'abscisse x et N le point de la courbe C_g de même abscisse. Pour quelle valeur de x la distance MN est maximale ? Calculer la valeur maximale de MN.

✎ Solution

1. On calcule l'intégrale $I=\int_1^e \ln x dx$. On effectue une intégration par parties :

$$\int_a^b (u'v)(x)dx=[uv(x)]_a^b-\int_a^b (uv')(x)dx$$

On pose : $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=\ln x \end{cases}$ et $\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=\dfrac{1}{x} \end{cases}$

$$I=[x\ln x]_1^e-\int_1^e dx=e-(e-1)=1$$

2.1. $J=\int_1^e (\ln x)^2 dx$. On effectue une intégration par parties :

$$\int_a^b (u'v)(x)dx=[uv(x)]_a^b-\int_a^b (uv')(x)dx$$

On pose : $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=(\ln x)^2 \end{cases}$ et $\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=\dfrac{2}{x}\ln x \end{cases}$

$$J=\left[x(\ln x)^2\right]_1^e-2\int_1^e x\ln x dx=e-2I$$

2.2. On en déduit la valeur de l'intégrale J : $J=e-2$.

3. L'aire S a l'expression suivante :

$$S=\int_1^e \left(\ln x-(\ln x)^2\right)dx=I-J=3-e$$

4. On pose $d(x)=f(x)-g(x)=\ln x-(\ln x)^2$ puis on calcule la dérivée :

$$d'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2\ln x}{x}=\frac{1-2\ln x}{x}$$

La dérivée s'annule pour $x=\sqrt{e}$ et cette abscisse correspond à un maximum pour la fonction d qui est égal à $d\left(\sqrt{e}\right)=\ln\left(\sqrt{e}\right)-\left(\ln\left(\sqrt{e}\right)\right)^2=\dfrac{1}{4}$

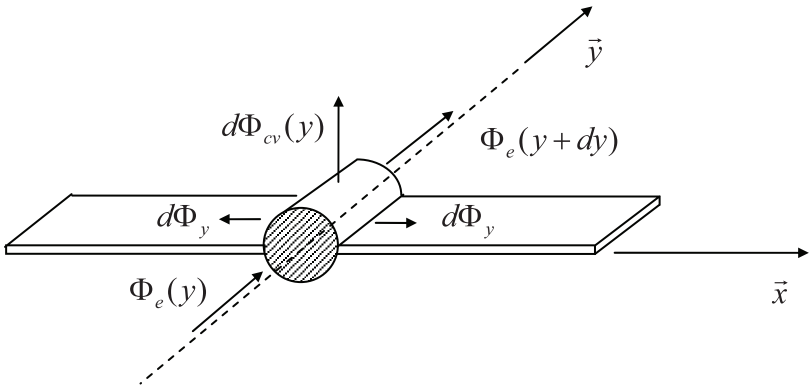
Finalement, la distance MN est maximale pour $x=\sqrt{e}$ et la valeur maximale de MN est égale à $\dfrac{1}{4}$.

❑ Exercice A-3

On souhaite déterminer l'expression de la température de l'eau $T(y)$ le long du tube de longueur $L = 1m$ d'un échangeur de chaleur.

On écrit pour cela le bilan thermique d'un tronçon de tube de longueur dy situé entre l'ordonnée y et l'ordonnée $y + dy$:

$$+\Phi_e(y) - \Phi_e(y+dy) - 2.d\Phi_y - d\Phi_{cv}(y) = 0$$



En exprimant les flux de chaleur en fonction de la température $T(y)$, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dT(y)}{dy} + 0.67\big(T(y) - T_a\big) = 0$$

On donne les valeurs numériques suivantes :

- Température de l'eau à l'entrée de l'échangeur : $T(0) = 80°C$;
- Température ambiante : $T_a = 5°C$.

1. Résoudre l'équation différentielle afin de déterminer l'expression de la température de l'eau $T(y)$ le long du tube de l'échangeur.
2. Calculer la température de l'eau $T(L)$ à la sortie de l'échangeur.
3. Tracer la représentation graphique de la fonction T sur l'écran de la calculatrice.

➯ Solution

1. L'équation différentielle s'écrit :

$$T'(y)+0.67T(y)=0.67T_a$$

$$T'(y)+0.67T(y)=3.35$$

On commence par résoudre l'équation sans second membre :

$$T'(y)+0.67T(y)=0$$

On obtient : $\dfrac{T_0'(y)}{T_0(y)}=-0.67$; $\ln\left|T_0(y)\right|=-0.67y+k$, $k\in \mathrm{IR}$.

d'où : $\left|T_0(y)\right|=e^k.e^{-0.67y}$, $k\in \mathrm{IR}$.

On obtient la solution de l'équation sans second membre :

$$T_0(y)=K.e^{-0.67y}\ ,\ K\in \mathrm{IR}\ .$$

On détermine ensuite une solution particulière $T_p(y)$. Le second membre est constant, on pose donc :

$$T_p(y)=A\ ,\ A\in \mathrm{IR}\ .$$

On remplace dans l'équation différentielle. On obtient :

$$A=5$$

On obtient l'ensemble des solutions :

$$T(y)=T_0(y)+T_p(y)=K.e^{-0.67y}+5$$

La condition $T(0)=80°C$ permet de déterminer la valeur de K :

$$K=75$$

On en déduit la solution de l'équation différentielle :

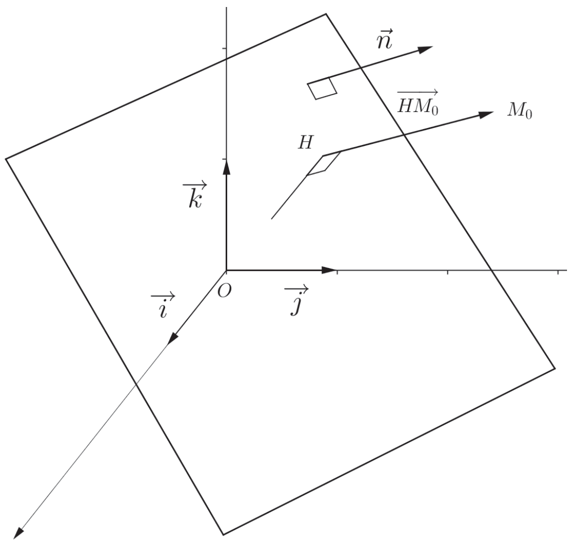
$$T(y)=75e^{-0.67y}+5$$

2. On calcule la température de l'eau à la sortie de l'échangeur :

$$T(1)=75e^{-0.67}+5=43.4°C$$

❑ Exercice A-7

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère le plan P d'équation cartésienne : $ax+by+cz+d=0$ et le point de l'espace $M_0(x_0;y_0;z_0)$. On note H le projeté orthogonal du point M_0 sur le plan P et $\vec{n}$ un vecteur normal au plan P. On souhaite démontrer la formule donnant la distance du point M_0 au plan P.



1. Justifier l'égalité suivante :

$$\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H}\right| = M_0H\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

2. Démontrer l'égalité suivante :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H} = -ax_0-by_0-cz_0-d$$

3. En déduire la formule donnant la distance M_0H.

✎ Solution

1. Le point H est le projeté orthogonal du point M_0 sur le plan P et $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan P, avec $\vec{n}=\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{M_0H}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires. La valeur absolue du produit scalaire est donc égale au produit des normes de ces vecteurs, d'où :

$$\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H}\right| = M_0H\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

2. On calcule le produit scalaire suivant :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H} = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_H - x_0 \\ y_H - y_0 \\ z_H - z_0 \end{vmatrix} = a(x_H - x_0) + b(y_H - y_0) + c(z_H - z_0)$$

Le point H appartient au plan P, donc : $ax_H + by_H + cz_H + d = 0$.

On remplace dans la dernière expression :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H} = -ax_0 - by_0 - cz_0 - d$$

3. On en déduit la distance du point M_0 au plan P :

$$d(M_0, P) = M_0H = \frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H}\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

❑ Exercice A-8

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit D la droite passant par le point $A(3;-4;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1;-3;1)$. On considère la droite D' dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 2 + t \quad ; \; t \in \mathrm{IR} \\ z = 1 - t \end{cases}$$

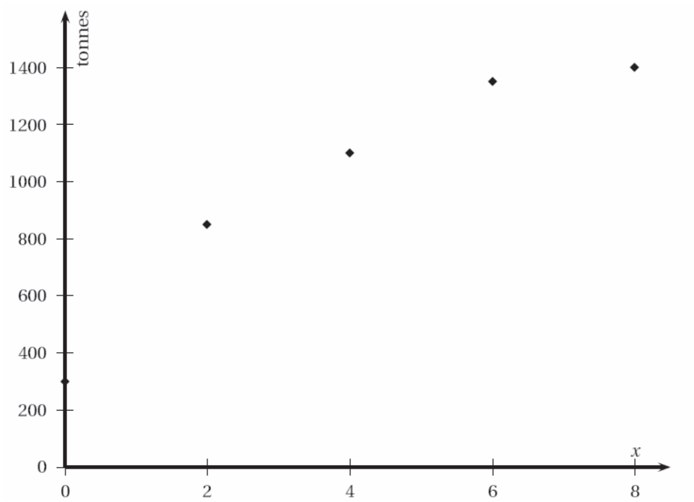
On admet qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites D et D'. On se propose de déterminer une représentation paramétrique de cette droite Δ et de calculer la distance entre les droites D et D'.
On note H le point d'intersection des droites D et Δ, H' le point d'intersection des droites D' et Δ. On appelle P le plan contenant la droite D et la droite Δ. On admet que le plan P et la droite D' sont sécants en H'.

❑ Exercice D-3

Une collectivité territoriale s'intéresse à la quantité annuelle de déchets d'aluminium recyclés exprimée en tonnes. En 2013, cette collectivité dispose des données suivantes :

Année	2005	2007	2009	2011	2013
Rang de l'année x_i	0	2	4	6	8
Aluminium recyclé y_i en tonnes	300	850	1 100	1 350	1 400

On a représenté ci-dessous le nuage de points associé à la série statistique $(x_i; y_i)$ dans un repère orthogonal du plan.



1. Déterminer l'équation de la droite D de régression de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.
2. A l'aide de cet ajustement, estimer la quantité d'aluminium qui sera recyclée en 2015.
3. Un responsable affirme que l'augmentation annuelle moyenne entre 2011 et 2013 a été d'environ 1.8%.
3.1. Justifier ce taux de 1.8%.
3.2. Estimer à une tonne près, en utilisant ce taux, la quantité d'aluminium qui sera recyclée en 2015.
3.3. Avec cette méthode, en quelle année peut-on estimer que plus de 1 600 tonnes de déchets d'aluminium seront recyclés ?
4. Une étude nationale prévoit une quantité de 1 500 tonnes de déchets d'aluminium recyclés en 2015 pour cette collectivité territoriale. Lequel des deux modèles précédents semble-t-il le plus proche de cette étude ?

Solution

1. La calculatrice permet de déterminer l'équation suivante :

$$y = 135x + 460$$

2. Quantité de déchets d'aluminium qui seront recyclés en 2015 :

$$y = 135(10) + 460 = 1810 \text{ tonnes.}$$

3.1. On note t le taux annuel d'augmentation en pourcentage. On a la relation suivante :

$$1350\left(1+\frac{t}{100}\right)^2 = 1400 \Leftrightarrow t = 1.835\%$$

Le taux annuel d'augmentation a été d'environ 1.8%.

3.2. Quantité de déchets d'aluminium qui seront recyclés en 2015 :

$$y = 1400\left(1+\frac{1.8}{100}\right)^2 \approx 1451 \text{ tonnes.}$$

3.3. On écrit l'inéquation suivante :

$$1400\left(1+\frac{1.8}{100}\right)^n > 1600 \Leftrightarrow \left(1+\frac{1.8}{100}\right)^n > \frac{8}{7} \Leftrightarrow n > \frac{\ln(8/7)}{\ln\left(1+\frac{1.8}{100}\right)} \Leftrightarrow n > 7.4850$$

On choisit $n = 8$. On peut estimer que plus de 1 600 tonnes de déchets d'aluminium seront recyclés en 2021.

4. Le second modèle semble être le proche de l'étude nationale.