DEVOIR A LA MAISON

Approximation affine – Méthode d'Euler

Objectif : Etudier l'approximation affine au voisinage d'un point et utiliser la méthode d'Euler pour tracer la courbe représentative d'une fonction.

Partie I : Approximation affine - Zoom sur le point de tangence

Partie A

1. Ouvrir une nouvelle figure GeoGebra. Tracer en bleu la courbe représentative de la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = x^2$
Placer le point A de coordonnées (1; 1) puis tracer en rouge la tangente à la courbe au point A.
2. En utilisant l'outil "zoom", délimiter une fenêtre de largeur de 0,1 unité environ. Que peut-on dire de la courbe et de tangente à cette échelle ?
Augmenter le zoom afin d'en déduire qu'une valeur approchée de 0,998² est 0,996.

À SAVOIR

Le fait que ta courbe représentative d'une fonction et sa tangente soient très proches lorsqu'on zoome sur le point A se traduit par la propriété suivante : Pour une fonction *f* dérivable en a ∈ I :

On a : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ c'est-à-dire que pour *h* proche de 0, $f(a+h)$ est proche de $f'(a)h + f(a)$.

En effet, si $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est proche de $f'(a)$ alors $f(a+h)-f(a)$ est proche de $f'(a)h$ et $f(a+h)$ est proche de $f'(a)h + f(a)$.

Si on pose $x - a = h$, si *x* est voisin de a alors *h* est proche de 0 et $f(x)$ est proche de $f'(a)(x-a)+f(a)$

On note : $f(x) \approx f'(a)(x-a)+f(a)$

On dit que la fonction $x \mapsto f'(a)(x-a)+f(a)$ est une **approximation affine** de la fonction *f* au voisinage de a.

Partie B

1. À l'aide des rappels ci-dessus, donner une approximation affine des fonctions suivantes au voisinage de *a* :
a) $f(x) = x^3$ en $a = 2$.
b) $f(x) = \sqrt{x}$ en $a = 3$.
c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ en $a = 1$

2. En utilisant les résultats de la question 1., donner une valeur approchée des nombres $1{,}999^3$, $\sqrt{3{,}02}$ et $\dfrac{1}{1{,}001^2}$

Comparer avec les valeurs obtenues à l'aide d'une calculatrice.

Partie II : Méthode d'Euler

But de l'exercice : Trouver des fonctions *f* définies et dérivables sur]0 ; + ∞[qui vérifient les deux conditions :

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

On démontrera en classe de Terminale l'existence et l'unicité d'une telle fonction.

Remarques et méthodes :

La lecture inverse du tableau des dérivées ne nous est d'aucune aide ici, aucune fonction usuelle ne semblant convenir. Nous allons voir comment construire point par point une approximation de la courbe représentative de cette fonction *f* sur l'intervalle [1 ; 3], en considérant que, sur de tous petits intervalles, la courbe et sa tangente sont pratiquement confondues.

1. Quelques caractéristiques de la fonction recherchée

a. Démontrer que la fonction *f* est strictement croissante sur]0 ; + ∞[.
b. De la condition *f*(1) = 0, déduire le signe de la fonction *f* sur]0 ; + ∞[.

2. Initialisation
On se place au voisinage de 1, dont on connaît l'image par *f* puisque *f*(1) = 0.

a) Démontrer qu'une approximation affine de *f* au voisinage de 1 est : $f(x) \approx f'(1)(x-1)+f(1)$
En déduire qu'une valeur approchée de *f*(1,1) est 0,1.

b) Démontrer qu'une approximation affine de *f* au voisinage de 1,1 est : $f(x) \approx f'(1{,}1)(x-1{,}1)+f(1{,}1)$
En déduire qu'une valeur approchée de *f*(1,2) est donnée par $f(1{,}2) \approx f'(1{,}1)\times 0{,}1+f(1{,}1)$ et calculer cette valeur approchée.

c) Réitérer ce raisonnement afin d'établir que : $f(1{,}3) \approx f'(1{,}2)\times 0{,}1+f(1{,}2)$ et calculer cette valeur approchée.

3. Utilisation d'un tableur
On vient d'établir que, pour tout $n \geq 0$ et en posant $x_0 = 1$, on peut trouver une valeur approchée de $f(x_{n+1})$ à partir de celle de $f(x_n)$:

$$f(x_{n+1}) \approx f'(x_n)\times 0{,}1+f(x_n)$$

On a également calculé les coordonnées de trois points de la courbe représentative de *f*. On peut poursuivre en itérant cette tâche grâce à un tableur.

Remarque : Il est possible d'augmenter la précision en changeant le pas de la procédure (par exemple en prenant 0,01).

Travail demandé :
Après avoir visionné la vidéo (didacticiel vidéo) :
1/ Tracer, point par point et avec un pas de 0,1, le nuage des points de la courbe recherchée sur l'intervalle [1;3]. Cette méthode s'appelle la **méthode d'Euler** et la fonction s'appelle la fonction logarithme népérien (qui sera étudiée en Terminale).
2/ Imprimer la courbe obtenue.
3/ Reprendre les points 1/ et 2/ avec un pas de 0,01.

Consignes complémentaires :
1/ Téléchargement du logiciel gratuit **GeoGebra** : www.geogebra.org/cms
(Vous pouvez également chercher sur un moteur de recherche avec les mots clés "télécharger" et "GeoGebra"). Installer le logiciel GeoGebra sur votre ordinateur.
Il est possible également de faire cette étude en utilisant le tableur **OpenOffice.Org**. Vous utiliserez GeoGebra pour ce D.M.
2/ Rendre une copie par groupe de 2 élèves (**2 élèves maximum par groupe**). Imprimer les figures demandées et les joindre avec la copie.
3/ L'ensemble de la construction est disponible sous forme de vidéo sur l'E.N.T (Espace Numérique de Travail). Il suffit de cliquer sur le document ayant l'extension "htm" afin de lancer la vidéo (voir sur le cahier de textes en ligne).

Bon travail à tous !